

Précisions sur les types de raisonnement à exploiter en mathématique

Direction de la formation générale des jeunes
Secteur de l'éducation préscolaire et de l'enseignement primaire et secondaire
Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur

Plan de la présentation

- ❖ Sens de la compétence
- ❖ Principaux types de raisonnement
- ❖ Stratégies sollicitées dans l'exercice des compétences
- ❖ Situation d'apprentissage
- ❖ Exemples de tâches

Sens de la compétence

Déployer un raisonnement mathématique consiste à **formuler des conjectures, à critiquer, à justifier ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques.**

Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ), Enseignement secondaire, premier cycle, p. 242.

À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève est en mesure...

Énoncés que l'on croit vrais, mais qui n'ont pas encore été démontrés

- de cerner une situation et d'émettre des **conjectures**;
- de mettre à profit les concepts et les processus appropriés à la situation;
- d'expérimenter différentes pistes pour confirmer ou **réfuter** ses conjectures. Il les valide soit en appuyant chaque étape de sa solution sur des concepts, des processus, des règles ou des énoncés, qu'il exprime de façon structurée, soit en fournissant des contre-exemples.

Rejeter l'énoncé

À la fin du deuxième cycle du secondaire, dans les trois séquences de formation, **l'élève est en mesure...**

- d'émettre des conjectures en mettant à profit les concepts et les processus appropriés et les confirme ou les réfute à l'aide de différents types de raisonnement;
- de valider ces conjectures en appuyant chaque étape de sa **preuve** sur des concepts, des processus, des règles ou des énoncés déjà admis, qu'il exprime de façon structurée.

Ensemble de justifications basées sur des observations, des définitions et des théorèmes

PFEQ, Enseignement secondaire, deuxième cycle, mathématique, p. 32.

Principaux types de raisonnement

Les **raisonnements particuliers à chaque champ mathématique** sont les raisonnements arithmétique, proportionnel, algébrique, géométrique, probabiliste et statistique.

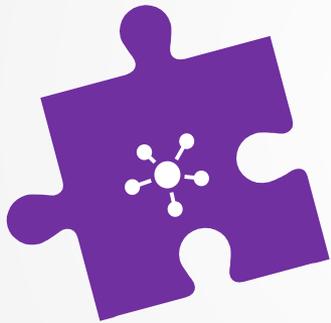
Raisonnement inductif



Raisonnement déductif



Raisonnements propres à chacun des champs



Raisonnement par analogie



Réfutation à l'aide d'un contre-exemple

Le raisonnement inductif



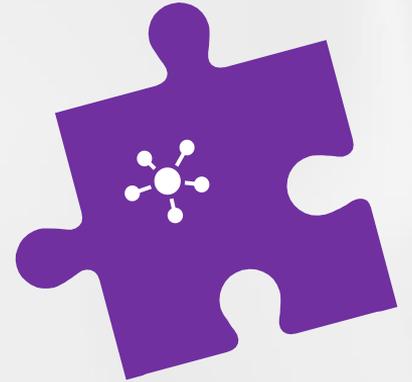
Le **raisonnement inductif** consiste à généraliser à partir de l'observation de cas particuliers.

PFEQ, deuxième cycle, p. 28.

Le raisonnement par analogie

Le raisonnement par **analogie** consiste à comparer divers éléments en s'appuyant sur des ressemblances pour tirer des conclusions [ou pour émettre des conjectures].

PFEQ, deuxième cycle, p. 28.



Le raisonnement déductif



Le **raisonnement déductif**, qui est constitué d'un enchaînement [logique] de propositions, permet de tirer des conclusions à partir d'énoncés considérés comme vrais.

PFEQ, deuxième cycle, p. 28.

Démonstration :

Élaboration formelle d'un enchaînement d'étapes qui s'appuie sur des définitions, des théorèmes ou des énoncés déjà admis et qui respecte le symbolisme, les règles et les conventions.

La réfutation à l'aide d'un contre-exemple



La **réfutation** à l'aide d'un **contre-exemple** permet d'invalider une conjecture émise sans statuer sur ce qui est vrai.

PFEQ, deuxième cycle, p. 28.

- Un contre-exemple suffit pour démontrer qu'une conjecture est fausse.
- Le fait que plusieurs exemples permettent de vérifier un énoncé mathématique ne suffit pas à prouver qu'il est vrai.

PFEQ, premier cycle, p. 243.

Principaux types de raisonnement

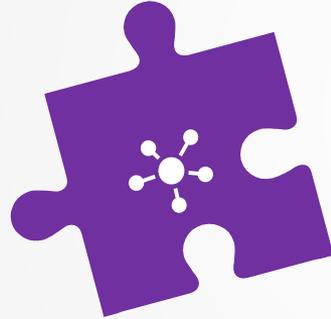
Raisonnement
inductif



Raisonnement
déductif



Raisonnements
propres
à chacun
des champs



Raisonnement
par analogie



Réfutation à l'aide d'un
contre-exemple

Stratégies sollicitées dans l'exercice des compétences



- Se représenter la situation mentalement ou par écrit
- Générer des exemples
- Rechercher des régularités
- Anticiper des résultats et les interpréter selon le contexte
- Se référer à un problème analogue déjà résolu
- Dégager de nouvelles données à partir de données connues

PFEQ, premier cycle, p. 262.

PFEQ, deuxième cycle, p. 115-116.

Stratégies sollicitées dans l'exercice des compétences



- Comparer et confronter ses démarches et ses résultats avec ceux de son enseignant ou de ses pairs
- Comprendre les définitions, les propriétés et les théorèmes pour les réutiliser
- Analyser des exemples; comparer, trouver les différences et les ressemblances
- Juger de la pertinence de données qualitatives ou quantitatives
- Etc.

PFEQ, premier cycle, p. 262.

PFEQ, deuxième cycle, p. 115-116.

Principaux types de raisonnement

Raisonnement
inductif



Raisonnement
déductif



Raisonnements
propres
à chacun
des champs

Raisonnement
par analogie



Réfutation à l'aide d'un
contre-exemple

Le raisonnement en apprentissage



Distinction

Calculer l'aire d'un disque
si son rayon est de:

- a) 3 cm
- b) 6 cm

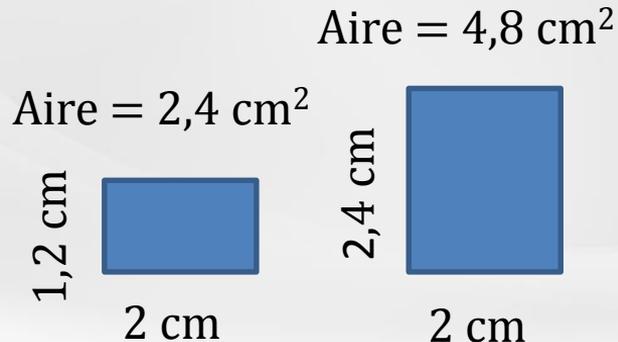
Exercice d'application

Qu'arrive-t-il à l'aire d'un
disque si on double son rayon?

Tâche de raisonnement

Exemple de questions préparatoires

Qu'arrive-t-il à l'aire d'un rectangle si on double sa hauteur?



Est-ce que les différents résultats des élèves respectent la relation proposée?

Est-ce que tous ces exemples sont suffisants pour justifier que, si la hauteur est doublée, l'aire double aussi?

Exemple de justification qui accompagne la conjecture

On peut déterminer l'aire d'un rectangle en multipliant la mesure de la base à celle de la hauteur ($A = b \times h$).

Si on double la hauteur de départ, on déterminera l'aire du nouveau rectangle en multipliant la mesure de la base, qui n'a pas changé, par la nouvelle hauteur, qui correspond à la hauteur de départ multipliée par 2.

Ceci équivaut à multiplier par 2 l'aire du rectangle de départ. C'est pourquoi l'aire sera deux fois plus grande.

Qu'arrive-t-il à l'aire d'un disque si on double son rayon?

Diverses formulations

Qu'arrive-t-il à l'aire d'un disque si on double son rayon?

Confirmez ou infirmez l'énoncé suivant : lorsque le rayon d'un disque double, l'aire du disque double aussi.



EXEMPLES DE TÂCHES

Exemples : premier cycle

- Formulez un énoncé au sujet du périmètre d'un rectangle lorsque ses dimensions doublent, triplent ou quadruplent.
- Comment est-il possible d'obtenir une fraction unitaire lorsqu'on soustrait ensemble deux fractions unitaires?
- Dans le plan cartésien, quel lien géométrique existe-t-il entre les points pour lesquels la somme de l'abscisse et de l'ordonnée est 5?

Exemples : premier cycle (*Suite*)

→ **Montrez** que la somme des mesures des angles extérieurs d'un triangle est égale à 360° .

Démontrez, prouvez à l'aide d'un raisonnement rigoureux en vous basant sur des propriétés, des définitions et des justifications

→ L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse?

Dans une distribution statistique, lorsque la valeur de chacune des données est doublée, la moyenne double aussi.

Vérifiez que l'énoncé est vrai
en vous appuyant sur une
preuve

Exemples : premier cycle (*Suite*)

→ **Confirmez** ou **infirmez** l'énoncé suivant : Lorsqu'on ajoute deux nombres opposés dans une distribution statistique, la moyenne ne change pas.

Trouvez un contre-exemple

→ Un hamburger est composé de pain, de tomates, de laitue et de viande. Si le prix de chacun des ingrédients augmente de 5 %, de quel pourcentage augmentera le prix total du hamburger?

Exemples : premier cycle (*Suite*)

- Choisissez deux nombres entiers supérieurs à zéro. Puis, déterminez leur plus grand commun diviseur (pgcd) et leur plus petit commun multiple (ppcm). Que pouvez-vous dire à propos du produit du pgcd et du ppcm de ces deux nombres?

- Combien y a-t-il de solutions à l'équation $x^2 = 36$?

Exemples : 3^e secondaire

- L'énoncé qui suit est-il vrai ou faux? Il existe plus de façons de former des équipes distinctes de 3 personnes que de 9 personnes dans un groupe de 12 personnes.
- Montrez que les expressions $(x + y)^2$ et $\frac{4x^3 + 8x^2 + 4xy^2}{4x}$ sont équivalentes si $x \neq 0$.

Exemples : 3^e secondaire (*Suite*)

- Confirmez ou infirmez l'énoncé suivant : Lorsqu'on vide un réservoir cylindrique avec un débit constant, la relation entre la hauteur de l'eau dans le cylindre et le volume d'eau qui reste correspond à une fonction du premier degré.
- Dans un triangle rectangle, on trace une hauteur issue du sommet de l'angle droit. Formulez une relation entre les mesures des cathètes, de l'hypoténuse et de la hauteur tracée. Expliquez.

Exemple : 3^e secondaire (*Suite*)

→ Pour quelle raison, lorsqu'on multiplie ou on divise les termes d'une inéquation par un nombre négatif, le symbole d'inégalité ($<$, $>$, \leq et \geq) change-t-il ?

Exemples : 4^e secondaire

- Quelle conjecture pouvez-vous émettre concernant le sinus de deux angles supplémentaires?
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Toutes les réciproques de fonctions sont des fonctions.

Si l'affirmation est vraie, démontrez-le. Si elle est fausse, donnez un contre-exemple.

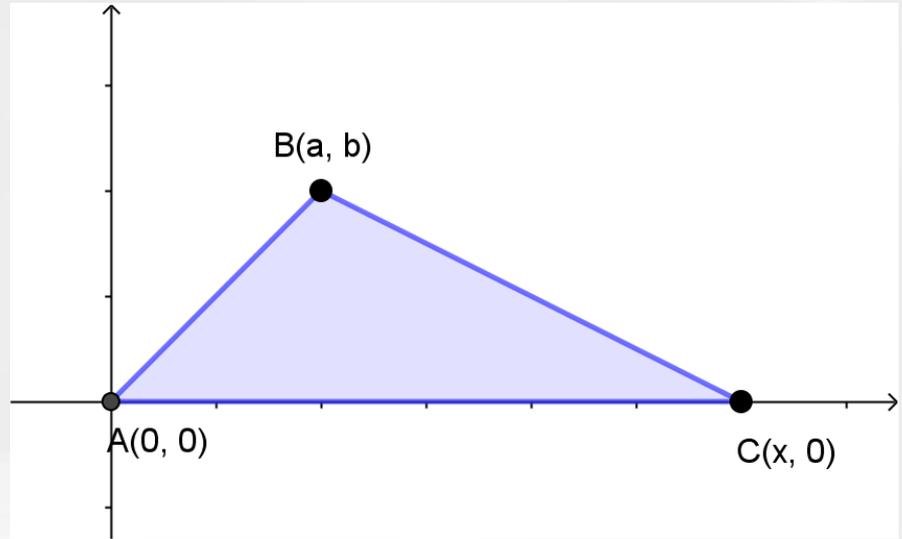
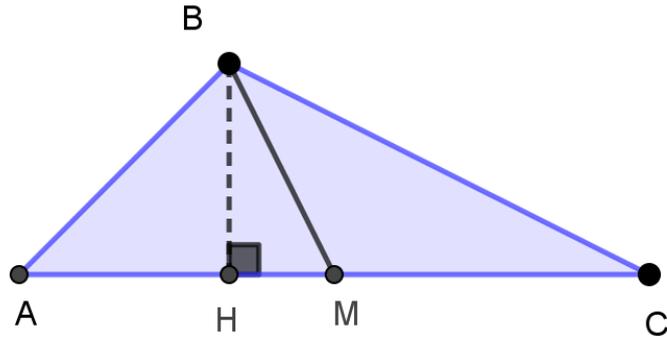
Exemples : 4^e secondaire (*Suite*)

- Confirmez ou infirmez l'énoncé suivant : Deux distributions statistiques qui ont le même écart moyen ont la même moyenne.

- Démontrez les énoncés suivants :
 - Dans un cercle, deux angles au centre isométriques déterminent des cordes isométriques.
 - Toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième côté détermine sur ces côtés des segments dont les mesures sont proportionnelles.

Exemple : 4^e secondaire (*Suite*)

→ Démontrez que la médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

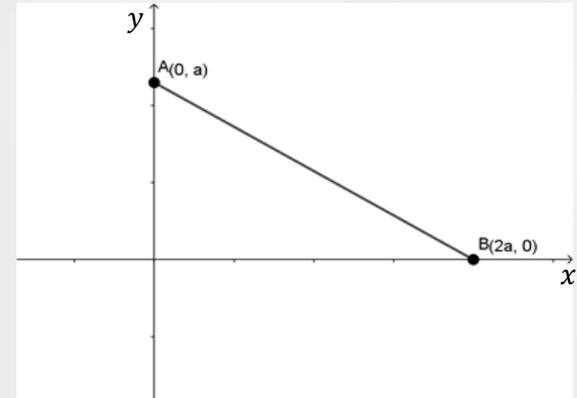


Exemples : 4^e secondaire (*Suite*)

→ Dans le plan cartésien ci-dessous, on trace une suite de segments de droites, dont les extrémités se situent sur chacun des axes et ce, parallèlement à \overline{AB} .

On détermine ensuite les coordonnées du point milieu de chacun de ces segments.

Quel lien existe-t-il entre le lieu géométrique des points milieux et les segments tracés? Justifiez.

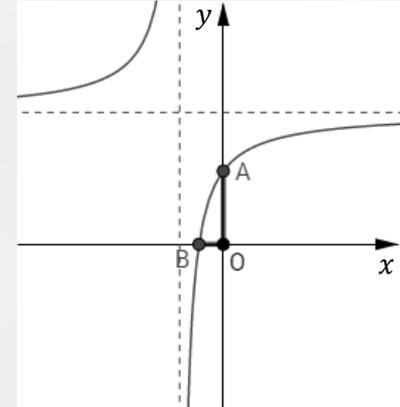
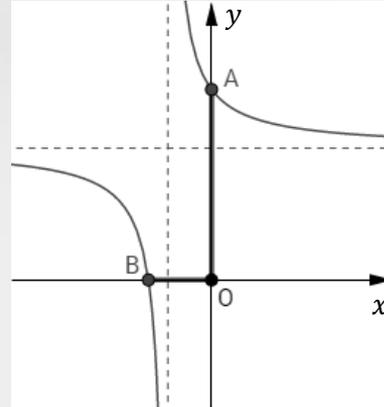


Exemples : 5^e secondaire

- Démontrez que tout triangle inscrit dans un cercle dont l'un des côtés passe par le centre du cercle est un triangle rectangle.
- Démontrez que les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle sont supplémentaires.

Exemples : 5^e secondaire (*Suite*)

→ Voici deux représentations graphiques possibles d'une fonction rationnelle :



Conjecturez à propos du lien entre le rapport $\frac{m_{\overline{AO}}}{m_{\overline{BO}}}$ et les paramètres **h** et **k** de la règle de la fonction.

Formulez une conjecture

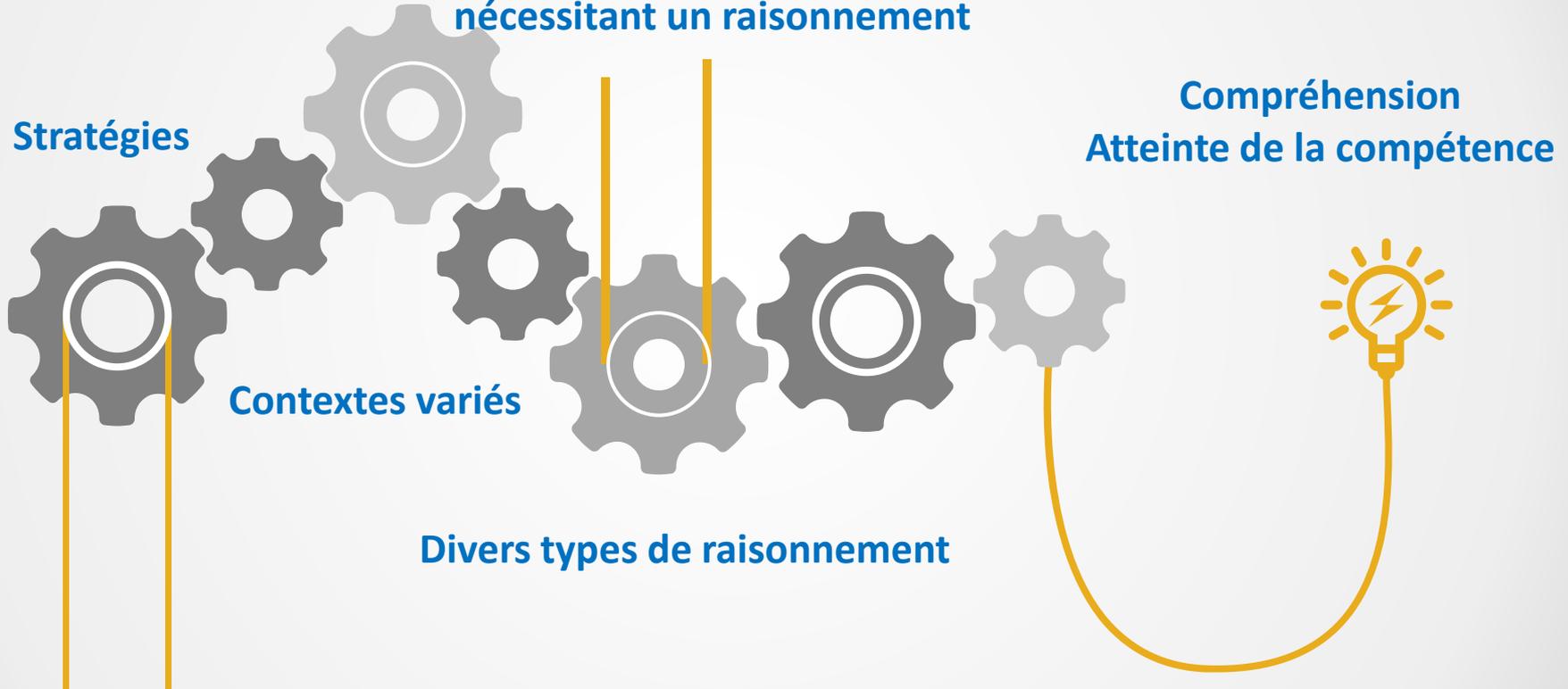
Exemples : 5^e secondaire (*Suite*)

- Quel lien pouvez-vous établir entre l'aire du triangle formé par le graphique d'une fonction valeur absolue et l'axe des abscisses et les paramètres **a** et **k** de la règle de la fonction? Justifiez.

Conclusion

Présence régulière de questions
nécessitant un raisonnement

Stratégies



Contextes variés

Divers types de raisonnement

Compréhension
Atteinte de la compétence

Pour nous joindre



Mariannik Toutant

Responsable des programmes d'études en mathématique

Direction de la formation générale des jeunes

mariannik.toutant@education.gouv.qc.ca