

TYPES DE RAISONNEMENT À MOBILISER DANS L'EXERCICE DE LA COMPÉTENCE DÉPLOYER UN RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Dans l'exercice de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*, l'élève doit notamment émettre des conjectures et réaliser des preuves ou des démonstrations. Ainsi, il est amené à faire appel à divers types de raisonnement pour préciser, valider, réajuster ou réfuter des conjectures émises ou non par lui. Cependant, il est important qu'il perçoive les distinctions entre le raisonnement, la preuve ou la démonstration. Il raisonne lorsqu'il appréhende une situation, oriente son action et structure sa pensée. Il prouve une conjecture lorsqu'il donne une explication qui est « acceptée par une communauté donnée (ex. : classe, population, communauté mathématique, communauté scientifique)

et [qu'il] tient compte de l'interlocuteur ou du degré de rigueur requis dans l'argumentation¹. » Il démontre un énoncé quand sa preuve, acceptée par la communauté scientifique, respecte certaines règles et que les objets mathématiques sur lesquels il opère ont un statut théorique². D'autre part, « critiquer, infirmer, justifier une affirmation, exprimer

correctement ses idées dépassent largement le cadre des mathématiques et relèvent de la formation générale de l'individu. L'étude, tout au long de la scolarité, de situations d'apprentissage suffisamment variées participe à cette dynamique³. »

Dans le développement de sa compétence à déployer un raisonnement mathématique, au 1^{er} cycle du secondaire, l'élève a notamment été initié à quelques

L'ÉLÈVE DOIT NOTAMMENT ÉMETTRE DES CONJECTURES ET RÉALISER DES PREUVES OU DES DÉMONSTRATIONS. AINSI, IL EST AMENÉ À FAIRE APPEL À DIVERS TYPES DE RAISONNEMENT POUR PRÉCISER, VALIDER, RÉAJUSTER OU RÉFUTER DES CONJECTURES ÉMISES OU NON PAR LUI.

règles élémentaires du raisonnement déductif et a appris à distinguer les propriétés vérifiées expérimentalement et celles établies par déduction. Il a également appris à justifier des étapes de son raisonnement en s'appuyant sur des énoncés et des définitions ou en

recherchant des contre-exemples.

Dans chacun des champs mathématiques, l'élève doit recourir à des types de raisonnement spécifiques. Par exemple, le raisonnement statistique fera appel notamment à l'interprétation d'un ensemble de résultats ou d'une représentation graphique ainsi

¹ PFEQ p.29

² Gilbert ARSAC et autres, *Initiation au raisonnement déductif au collège. Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*, Lyon, Presses universitaires de Lyon, 1992.

³Réciproques, Pédagogie, Équipe académique Mathématiques, n°15, mai 2001
[En ligne] [<http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/profplus/publica/bulletin/bull15/raison.htm>].

qu'aux concepts de probabilité et de donnée statistique alors que le raisonnement algébrique fera particulièrement appel au sens du nombre ou des opérations. Cependant, « tout raisonnement utilise à la base le procédé d'inférence (si... alors...) en partant d'une prémisse pour aboutir à une conclusion. Les erreurs de raisonnement proviennent de prémisses fausses ou incohérentes, car si on peut déduire le vrai du faux, l'inverse n'est pas possible⁴. »

En plus des raisonnements propres à chacun des champs mathématiques, l'élève peut recourir à d'autres types de raisonnement plus généraux parmi lesquels on trouve :

• LE RAISONNEMENT DÉDUCTIF

Processus par lequel l'élève est amené à dégager une conclusion à partir d'énoncés déjà admis. Il permet à l'élève de passer du général au particulier. Chaque pas de raisonnement est constitué d'un « îlot déductif » qui comprend une proposition de départ, une règle d'inférence (définitions, axiomes, théorèmes, etc.) et une proposition de sortie qui devient la proposition de départ d'un autre pas, s'il y a lieu. Il englobe les raisonnements par l'absurde (contradiction) et par disjonction de cas.

« La géométrie constitue un support privilégié pour la pratique du raisonnement déductif. Mais le raisonnement en géométrie s'appuie aussi sur l'observation et la construction de figures, la mise en place d'expérimentations, de procédures d'essais-erreurs, l'élaboration et la critique de conjectures. Pour le raisonnement mathématique, c'est un

domaine riche, varié, présentant un aspect visuel et esthétique, voire ludique, et qui donne lieu à différents types de raisonnement. Pour que l'apprentissage du raisonnement géométrique s'exerce de manière efficace, il ne doit pas se réduire à l'apprentissage formel de la démonstration. À cette fin, les énoncés ne doivent pas être systématiquement donnés sous une forme fermée : « montrer que » suivie d'une propriété apparaissant aux élèves aussi évidente que les hypothèses. L'activité géométrique devient alors pour eux un jeu incompréhensible et stérile⁵. »

• LE RAISONNEMENT INDUCTIF

Processus par lequel l'élève est amené à dégager des règles ou des lois et à généraliser à partir de l'observation de cas particuliers. Les stratégies du type essais systématiques ou dirigés sont associées à ce type de raisonnement.

« La généralisation par voie d'induction ne garantit ni la certitude ni la vérité. Par exemple, à partir du résultat d'un sondage sur un échantillon d'une population, on induit que le résultat sera proche sur l'ensemble de la population. Cette généralisation ne peut bien évidemment pas être une certitude⁶. » « En mathématique, le raisonnement inductif ne se conçoit, en général, que comme une première étape, conduisant à une conjecture. Il restera ensuite, par un raisonnement déductif, à démontrer la véracité de cette conjecture⁷. »

⁴ Classement des raisonnements
[En ligne]
[http://projetconnaissance.free.fr/classement/classements/classement_raisonnements.html].

⁵ Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège, Raisonnement et démonstration
[En ligne] [[eduscol.education.fr/ D0015](http://eduscol.education.fr/D0015)].

⁶ Sciences de l'ingénieur, le plaisir du raisonnement
[En ligne] [http://www.sci.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?id=24&page=affiche_ressource].

⁷ Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège, Raisonnement et démonstration
[En ligne] [[eduscol.education.fr/ D0015](http://eduscol.education.fr/D0015)].

• LE RAISONNEMENT PAR ANALOGIE

Processus par lequel l'élève est amené à comparer divers éléments et à s'appuyer sur des ressemblances (similitudes) pour émettre des conjectures ou tirer des conclusions. C'est par la prise de conscience des structures des situations que le raisonnement analogique devient possible.

• LE RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DE CAS

Processus par lequel l'élève est amené à valider une conjecture en s'assurant qu'elle couvre tous les cas possibles. À la différence d'une étude exhaustive, dans un raisonnement par disjonction des cas les situations sont différenciées à l'aide d'un ou de plusieurs paramètres.

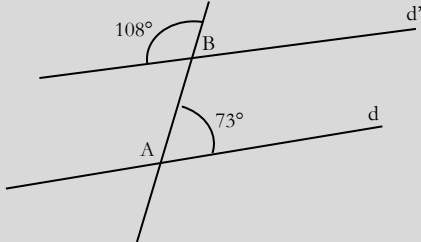
• LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE (CONTRADICTION)

Processus par lequel l'élève est amené à valider une conjecture en montrant que sa négation conduit à une contradiction. Ce raisonnement repose donc sur le fait que le « non non-vrai » ne saurait être que le vrai.

• LA RÉFUTATION À L'AIDE D'UN CONTRE-EXEMPLE

Processus par lequel l'élève est amené à réfuter une conjecture en évoquant un cas ou un exemple pour lequel la conjecture s'avère fausse. Il est essentiel de faire comprendre aux élèves que la production de nombreux exemples n'est pas une preuve alors que celle d'un seul contre-exemple en est une.

QUELQUES EXEMPLES

Raisonnement déductif	- Quelle est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$? - L'expression $\operatorname{cosec} A (\operatorname{cosec} A - \sin A) = \cot^2 A$ est-elle une identité trigonométrique?
Raisonnement inductif, analogie et réfutation à l'aide d'un contre-exemple	Si on double les dimensions d'un rectangle, alors on double son périmètre. Si on triple les dimensions du rectangle, alors on triple son périmètre. On généralise cet énoncé. Cet énoncé peut-il être appliqué pour les aires?
Raisonnement par disjonction de cas	- Soit a, b et c trois entiers relatifs. On a : $abc = 32$, $a < b < c$ et $bc < 0$ On détermine toutes les solutions possibles. - Quel est le dernier chiffre de 2^{50}?
Raisonnement par l'absurde (contradiction)	Les droites d et d' sont-elles parallèles? 

Cependant, dans l'exercice de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*, on ne doit pas demander à l'élève de réaliser des tâches en lui imposant un raisonnement spécifique, mais plutôt lui présenter des situations dans lesquelles il pourra déployer différents types de raisonnement.

Par exemple,

$3^n + 1$ est-il pair pour tout entier n ?

Raisonnement par disjonction de cas	Considérons le chiffre des unités de $3^n + 1$. Les chiffres des unités possibles pour les puissances de 3 sont 1, 3, 7 ou 9. En ajoutant 1, les chiffres des unités possibles du nombre $3^n + 1$ sont donc 2, 4, 8 ou 0. Donc $3^n + 1$ est pair.
Raisonnement par l'absurde (contradiction)	Si $3^n + 1$ est impair alors il est de la forme $2k + 1$, avec k entier naturel. Donc $3^n = 2k$, et 2 apparaît dans la décomposition en produit de nombres premiers de 3^n. Or, seul 3 se retrouve dans la décomposition en produit de nombres premiers de 3^n. Il y a contradiction, donc $3^n + 1$ est pair.