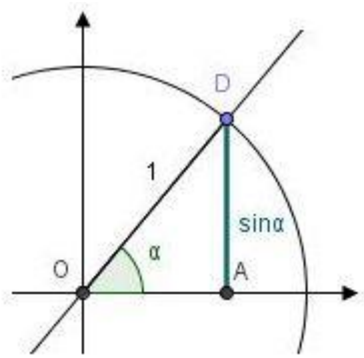
Cercle trigonométrique et segments remarquables

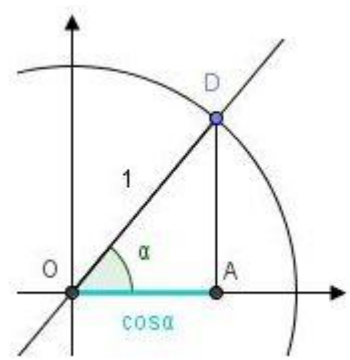
Définitions des fonctions trigonométriques à partir de segments remarquables

Dans le premier quadrant

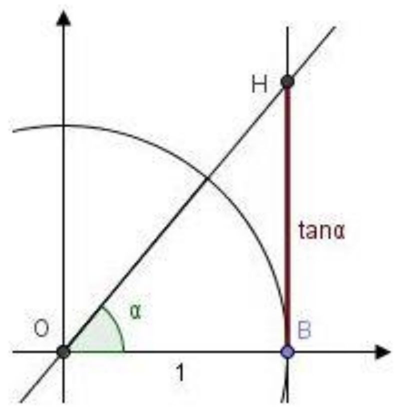
Sinus d'un angle



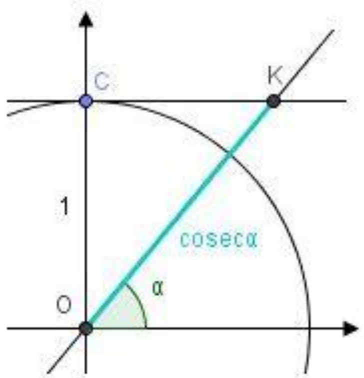
Cosinus d'un angle



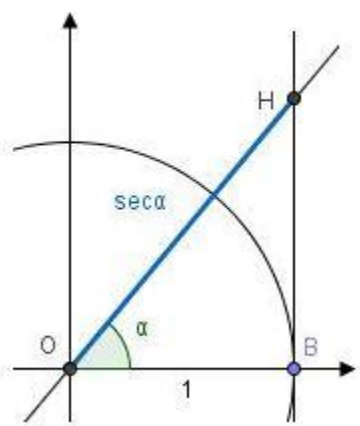
Tangente d'un angle



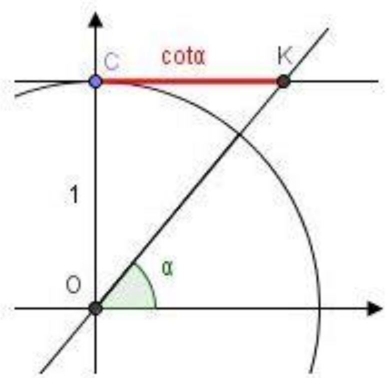
Cosécante d'un angle



Sécante d'un angle

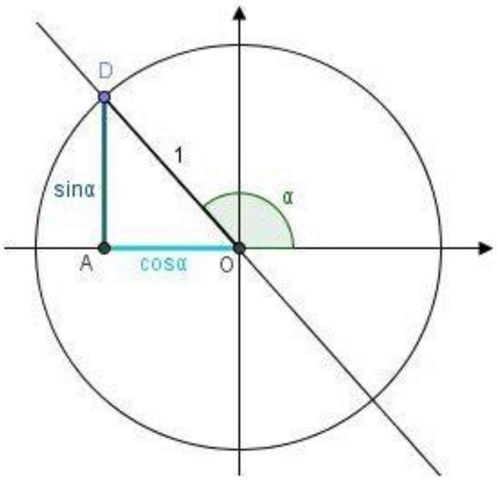


Cotangente d'un angle

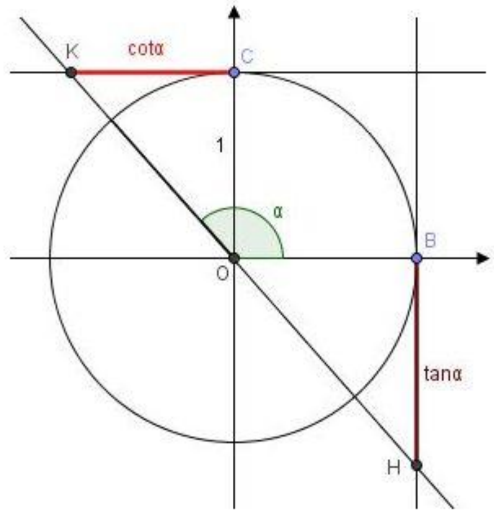


Dans le deuxième quadrant

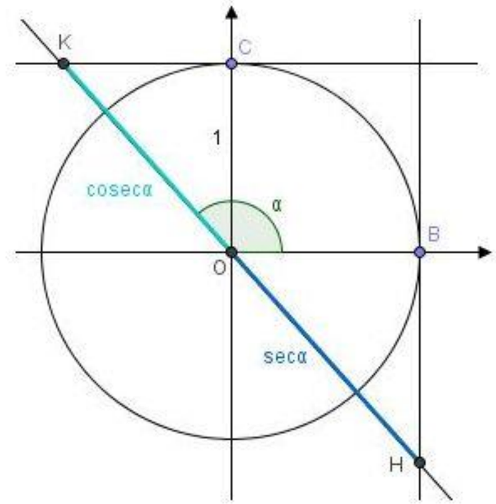
Sinus et cosinus d'un angle



Tangente et cotangente d'un angle



Sécante et cosécante d'un angle



Relations entre les fonctions trigonométriques

Sinus et cosécante d'un angle

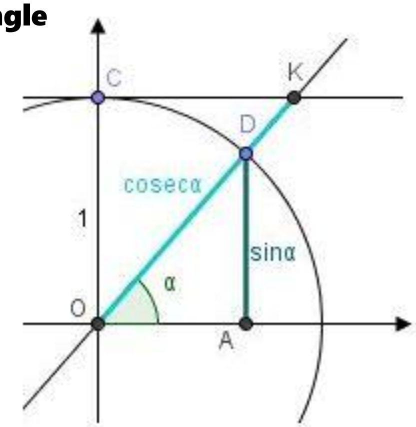
$\Delta OAD \sim \Delta KCO$

$$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{OD}} = \frac{m\overline{CO}}{m\overline{OK}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{1}{\csc\alpha}$$

d'où :

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$



Cosinus et sécante d'un angle

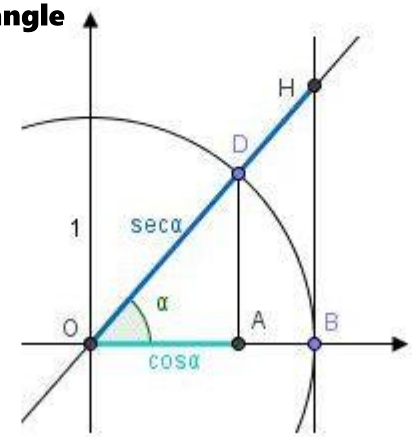
$\Delta OAD \sim \Delta OBH$

$$\frac{m\overline{OA}}{m\overline{OD}} = \frac{m\overline{OB}}{m\overline{OH}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha}$$

d'où :

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$



Sinus, cosinus et tangente d'un angle

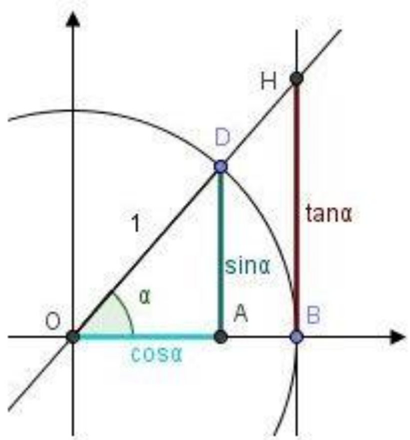
$\Delta OAD \sim \Delta OBH$

$$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{OA}} = \frac{m\overline{BH}}{m\overline{OB}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1}$$

d'où :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Sinus, cosinus et cotangente d'un angle

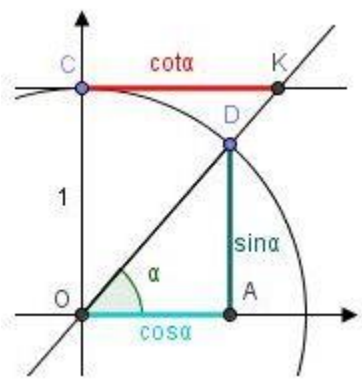
$\Delta OAD \sim \Delta KCO$

$$\frac{m\overline{OA}}{m\overline{AD}} = \frac{m\overline{KC}}{m\overline{CO}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha}{1}$$

d'où :

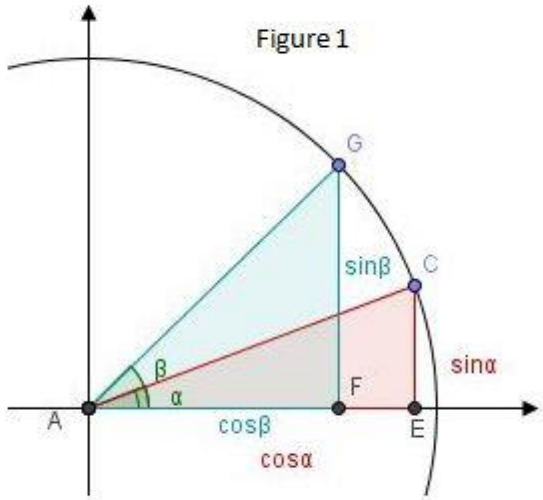
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



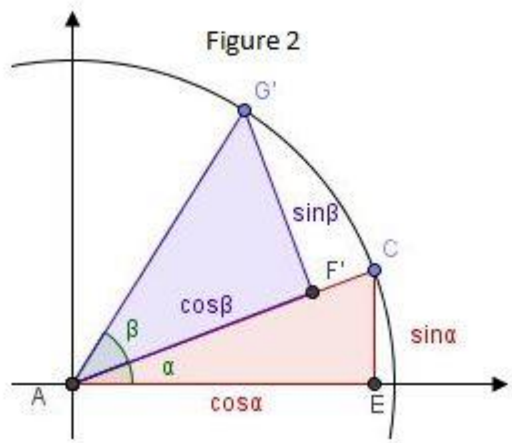
Somme et différence de deux angles

Sinus de la somme de deux angles

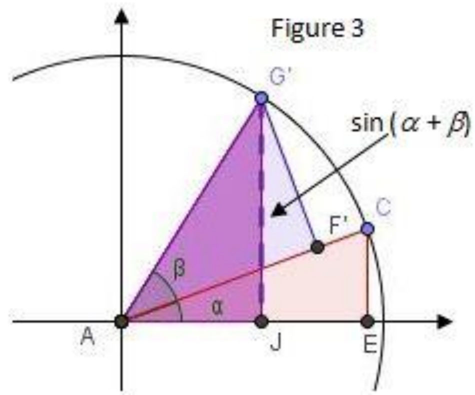
Dans la Figure 1, l'angle α détermine le Δ AEC et l'angle β détermine le Δ AFG.



Dans la Figure 2, le Δ AF'G' est l'image du Δ AFG à la suite d'une rotation de centre A et d'angle α.

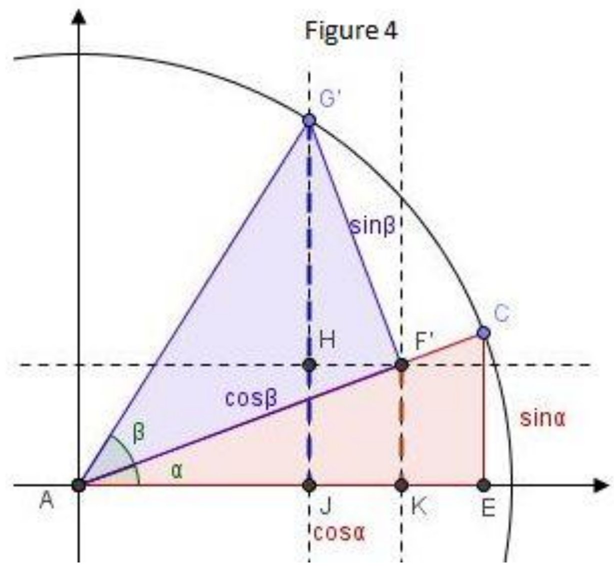


Pour calculer sin ($\alpha + \beta$), nous devons trouver la mesure du segment JG′ du Δ AJG′ de la Figure 3.



La Figure 4 nous montre que ce segment se décompose en la somme des segments JH et HG′ et que les segments JH et KF′ sont isométriques. De plus, on peut démontrer que les Δ G′HF′ et Δ AKF′ sont semblables.

De ce qui précède, on peut déduire que :



$$\sin\alpha = \frac{m\overline{KF'}}{\cos\beta} = \frac{m\overline{JH}}{\cos\beta}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = m\overline{JH}$$

de même que :

$$\cos\alpha = \frac{m\overline{G'H}}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta \cdot \cos\alpha = m\overline{G'H}$$

d'où :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Cosinus de la somme de deux angles

Pour calculer cos ($\alpha + \beta$), nous devons trouver la mesure du segment AJ du ΔAJG′ de la Figure 5.

La mesure de ce segment est le résultat de la différence entre les mesures des segments AK et JK. De plus, comme le montre la Figure 5, les segments JK et HF′ sont isométriques.

En outre, comme dans le cas de la Figure 4, on peut démontrer que les ΔG′HF′ et ΔAKF′ sont semblables.
De ce qui précède, on peut déduire que :

$$\cos\alpha = \frac{m\overline{AK}}{\cos\beta}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = m\overline{AK}$$

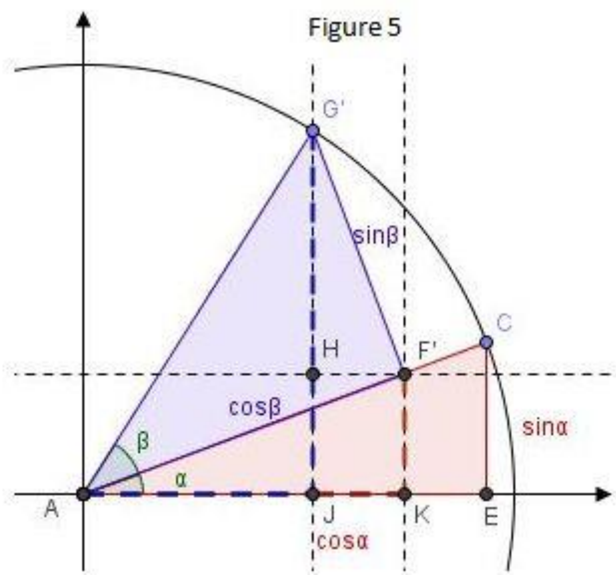
de même que :

$$\sin\alpha = \frac{m\overline{\mathrm{HF'}}}{\sin\beta} = \frac{m\overline{JK}}{\sin\beta}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = m\overline{JK}$$

d'où :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$



Différence de deux angles

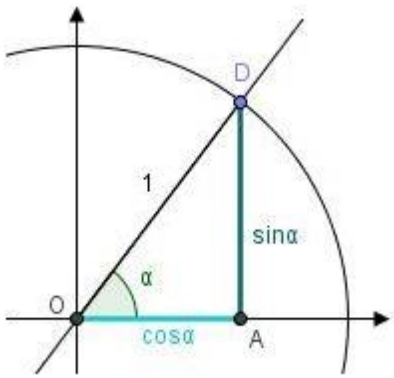
On peut montrer que sin ($-\alpha$) = – sin α et que cos ($-\alpha$) = cos α

d'où :

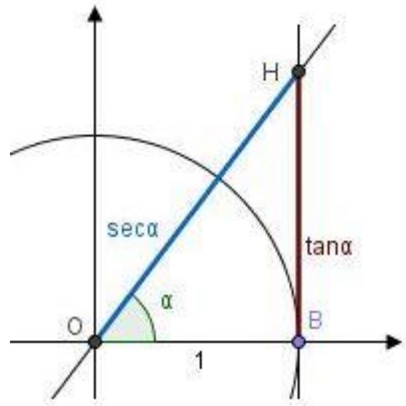
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad \text{et} \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Identités pythagoriciennes

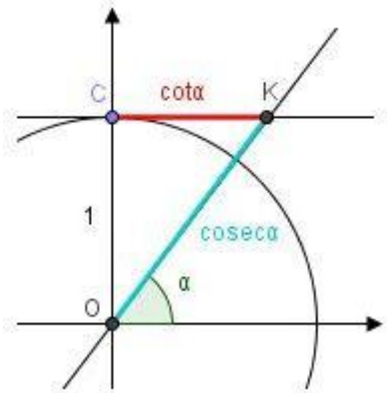
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$



$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

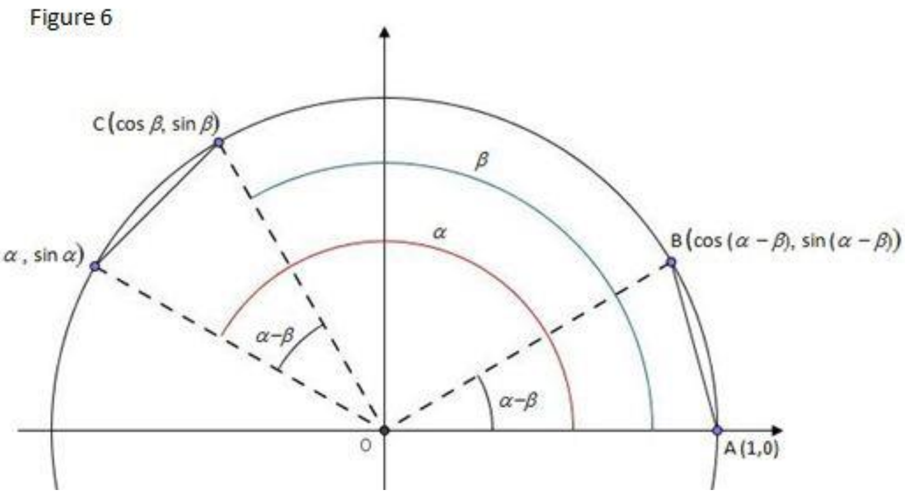


$1 + \cot^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\alpha$



Cosinus de la différence de deux angles

La Figure 6 montre la différence entre les angles α et β. De plus, $m\overline{AB} = m\overline{CD}$.



En utilisant la relation de la distance entre deux points, soit $d^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned}
\left(m\overline{AB}\right)^2 &= \left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-1\right)^2 + \left(\sin\left(\alpha-\beta\right)-0\right)^2 \\
\left(m\overline{AB}\right)^2 &= \cos^2\left(\alpha-\beta\right) - 2\cos\left(\alpha-\beta\right) + 1 + \sin^2\left(\alpha-\beta\right) \\
\left(m\overline{AB}\right)^2 &= \left(\cos^2\left(\alpha-\beta\right) + \sin^2\left(\alpha-\beta\right)\right) - 2\cos\left(\alpha-\beta\right) + 1 \\
\left(m\overline{AB}\right)^2 &= 1 - 2\cos\left(\alpha-\beta\right) + 1 \\
\left(m\overline{AB}\right)^2 &= 2 - 2\cos\left(\alpha-\beta\right)
\end{aligned}$$

de même que :

$$\begin{aligned}
\left(m\overline{CD}\right)^2 &= \left(\cos\beta - \cos\alpha\right)^2 + \left(\sin\beta - \sin\alpha\right)^2 \\
\left(m\overline{CD}\right)^2 &= \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha \\
\left(m\overline{CD}\right)^2 &= \left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) + \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\
\left(m\overline{CD}\right)^2 &= 1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\
\left(m\overline{CD}\right)^2 &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

d'où, puisque $\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{CD}\right)^2$,

$$\begin{aligned}
2 - 2\cos\left(\alpha-\beta\right) &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\
-2\cos\left(\alpha-\beta\right) &= -2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\
\cos\left(\alpha-\beta\right) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$