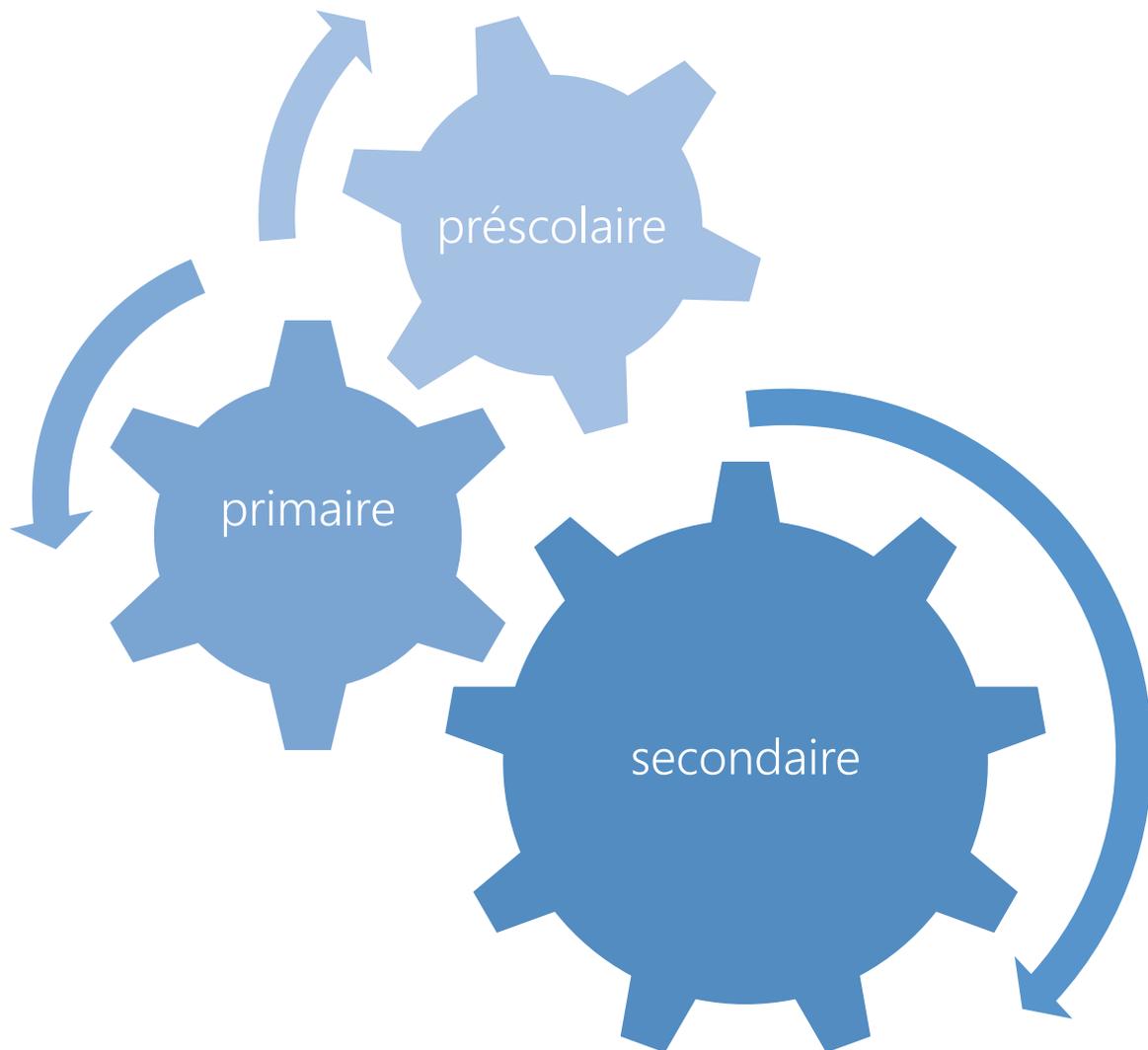


L'arrimage entre les cycles d'apprentissage

Mathématique

Document d'accompagnement



Printemps 2011

L'ARRIMAGE ENTRE LES CYCLES D'APPRENTISSAGE

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT

Dans ce document, on retrouve, en caractères gras, des extraits du Programme de formation et de la progression des apprentissages pour la mathématique, auxquels sont ajoutés des suggestions, des précisions, des exemples ainsi que des illustrations relativement :

- au développement des concepts et des processus;
- à la construction de réseaux de concepts et de processus;
- au sens des opérations sur les nombres :
 - structures additives,
 - structures multiplicatives,
- aux opérations sur les nombres :
 - processus personnels et conventionnels,
 - calcul mental,
 - utilisation de la technologie,
- à la manipulation.

La mathématique est une science et un langage dont les objets sont abstraits. C'est graduellement que se construit la pensée mathématique chez les élèves, notamment à partir d'expériences personnelles et d'échange avec les pairs. Ces apprentissages s'appuient sur des situations concrètes souvent liées à la vie quotidienne. Dès le primaire, les élèves sont placés dans des situations d'apprentissage qui leur permettent d'utiliser des objets, du matériel de manipulation, des ouvrages de référence ainsi que des outils et des instruments. Les activités et les tâches qui leur sont proposées les amènent à réfléchir, à manipuler, à explorer, à construire, à simuler, à discuter, etc. Les élèves peuvent ainsi s'approprier des concepts, des processus et des stratégies utiles à la mathématique. Ils doivent également faire appel à leur intuition, à leur sens de l'observation, à leurs habiletés manuelles de même qu'à leur capacité de s'exprimer, de réfléchir et d'analyser. Ils apprennent ainsi à établir des liens, à se représenter des objets mathématiques de différentes façons et à les organiser mentalement pour en arriver progressivement à l'abstraction. (Progression des apprentissages au secondaire mathématique, p. 5)

L'enseignant devra favoriser une approche pédagogique qui tient compte de l'émergence de la pensée réflexive chez l'élève, à l'éveiller mentalement afin qu'il réfléchisse sur les notions qu'il a à apprendre. Cette approche devra aussi se soucier des interactions sociales entre les élèves, allant même jusqu'à créer une communauté d'apprenants puisque l'apprentissage se trouve consolidé lorsque l'élève travaille avec des pairs sur les mêmes concepts. Enfin, l'enseignant mettra en place, de façon consciente, des modèles et des outils pour l'apprentissage en vue de soutenir le développement des notions mathématiques chez l'élève.

C'est de cette façon que les élèves construisent leur boîte à outils pour communiquer¹ adéquatement dans ce langage qu'est la mathématique, pour raisonner efficacement en établissant des liens entre les concepts et les processus mathématiques et, enfin, pour résoudre des situations-problèmes. L'utilisation pertinente de concepts mathématiques et de stratégies variées leur permet alors de prendre des décisions éclairées sur divers sujets de la vie quotidienne. Associées aux activités d'apprentissage, les situations vécues par les élèves favorisent le développement des savoir-faire et des savoir-agir mathématiques, leur permettant ainsi de mobiliser et de consolider leurs connaissances mathématiques et d'en acquérir de nouvelles. (Progression des apprentissages, p. 3)

1. Au-delà de la compétence transversale *Communiquer de façon appropriée*, la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique* demande à l'élève de s'approprier et de coordonner des éléments du langage mathématique (modes de représentation) qui servent à la conceptualisation des objets mathématiques. En exploitant des concepts et des processus mathématiques, l'élève a à interpréter un message ou à produire des messages à caractère mathématique.

LE DÉVELOPPEMENT DES CONCEPTS ET DES PROCESSUS

Raisonnement en mathématique consiste à établir des relations, à les combiner entre elles et à les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique. (Programme de formation, p. 124) Raisonnement, c'est organiser de façon logique un enchaînement de faits, d'idées ou de concepts pour arriver à une conclusion qui se veut plus fiable que si elle était le seul fait de l'impression ou de l'intuition. Pour pratiquer le raisonnement mathématique, il faut appréhender la situation, mobiliser les concepts et les processus pertinents et établir des liens. Une telle démarche amène l'élève à s'approprier le langage mathématique, à construire le sens des concepts et des processus mathématiques et à les lier entre eux. (Programme de formation, p. 128)

Qu'est-ce qu'un concept?

Un concept, c'est la représentation mentale des attributs communs aux éléments d'une classe d'objets, que ces derniers soient mathématiques ou non.

Lorsque l'élève démontre son habileté à donner des exemples et des contre-exemples, à indiquer la présence ou l'absence d'attribut du concept, et ce, de façon constante, il y aura conceptualisation. Il existe plusieurs manifestations à l'acquisition et à la maîtrise d'un concept. En voici quelques-unes :

- Nommer le concept, en parler et le définir;
- Reconnaître et générer des exemples et des contre-exemples du concept;
- Utiliser diverses représentations (dessin, schéma, diagramme, symbole) pour représenter le concept et effectuer des transferts entre ces représentations;
- Dégager les attributs essentiels du concept;
- Comparer des concepts ayant une certaine parenté, en dégagant des attributs qui leur sont communs et des attributs qui les différencient.

La construction d'un concept et sa compréhension

Faisons l'analogie suivante : la construction d'un concept est comme la construction d'un objet. Pour construire un objet, il nous faut des outils, des matériaux et des efforts. Construire un concept suit une démarche semblable. *Les outils que nous utilisons pour édifier notre compréhension sont nos notions préalables ou antérieures, c'est-à-dire les connaissances que nous possédons déjà. Nos matériaux sont ce que nous voyons, entendons ou touchons, c'est-à-dire les éléments de notre environnement physique. Parfois, ces matériaux seront nos idées ou nos pensées, soit les idées que nous avons déjà et les pensées qui serviront à modifier certaines d'entre elles. Enfin, l'effort à fournir est une pensée active et réfléchie. Il ne peut y avoir d'apprentissage efficace sans que notre esprit soit engagé dans une démarche de réflexion².*

La conceptualisation prendra forme lorsque des liens se tisseront entre le concept à acquérir et les notions connexes à ce concept (les notions préalables ou antérieures). Comme les concepts antérieurs communiquent un sens au nouveau concept, de nouveaux liens se forment entre le nouveau concept et les anciens. Plus les concepts antérieurs sont utilisés pour donner du sens au concept nouveau, plus de liens sont formés, et plus de liens sont formés, meilleure sera la compréhension du nouveau concept. La compréhension sera la mesure de la qualité et de la quantité des liens unissant le nouveau concept aux concepts antérieurs. *La compréhension varie en fonction de l'existence d'idées appropriées et de la création de nouveaux liens³.*

2. John A. VAN DE WALLE et LouAnn H. LOVIN, *L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage*, Tome 1, p. 2.

3. Idem, p. 2.

Qu'est-ce qu'un processus?

Un processus, c'est une suite ordonnée de règles à appliquer à un nombre de données pour arriver avec certitude à un certain résultat, peu importe les données. Par exemple, un processus d'addition est une suite d'actions, une démarche, qui permettrait de trouver le résultat de l'addition de deux nombres.

Le tableau ci-dessous rappelle des manifestations relatives à l'apprentissage et à la maîtrise d'un concept, d'un processus ou d'une stratégie.

Je fais l'apprentissage d'un concept si...

- je peux en dégager les attributs essentiels (propriétés);
- je peux produire des exemples et des contre-exemples;
- je peux communiquer une définition personnelle;
- je peux lier ce concept à d'autres concepts;
- je peux le reconnaître en situation.

Je fais l'apprentissage d'un processus ou d'une stratégie si...

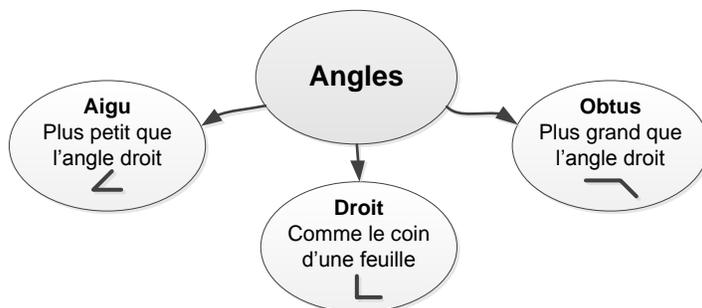
- je peux décrire le processus ou la stratégie, les définir ou encore en donner un exemple;
- j'en connais l'importance et l'utilité;
- je peux les mettre en œuvre;
- je connais et je peux expliquer toutes les étapes que j'ai franchies pour les appliquer;
- je peux comparer mon processus ou ma stratégie avec d'autres;
- je peux justifier les étapes de mon processus ou de ma stratégie en m'appuyant sur des concepts et des propriétés;
- je sais quand l'utiliser.

RÉSEAUX DE CONCEPTS ET DE PROCESSUS

Au premier cycle, l'élève s'engage dans la constitution d'un réseau de concepts et de processus mathématiques. (Programme de formation, p. 129)

Un réseau de concepts et de processus, c'est une représentation des liens qui unissent des concepts et des processus entre eux. Les réseaux de concepts et de processus riches en liens et bien construits par les élèves, démontrent la mesure de leur compréhension des concepts illustrés. Les réseaux sont dynamiques et personnels à chaque élève. Ils s'enrichissent au fil des apprentissages.

Un exemple d'un réseau de concepts sur les angles au deuxième cycle du primaire :



LE SENS DES OPÉRATIONS

Pour se donner une bonne compréhension des opérations et de leurs divers sens dans des contextes variés, l'élève doit connaître les relations entre les données et entre les opérations, choisir les bonnes opérations et les effectuer en tenant compte des propriétés et des priorités des opérations. Il doit également se donner une idée de l'ordre de grandeur du résultat.

L'élève sera donc amené à mathématiser une variété de situations illustrant différents sens. Il le fera de façon concrète, semi-concrète ou symbolique. Ces situations devront lui permettre de transposer un problème en problème plus simple, en plus de dégager, entre les données d'un problème, des relations qui vont permettre de progresser vers la solution. Comme le sens des opérations arithmétiques se développe en même temps que le sens du nombre, les deux doivent être travaillés de concert. (Progression des apprentissages, p. 9)

Dans l'addition et la soustraction, des quantités sont ajoutées, retirées, unies ou comparées. Il est important que les élèves exploitent les différents sens de l'addition et de la soustraction en travaillant tous les types de problèmes.

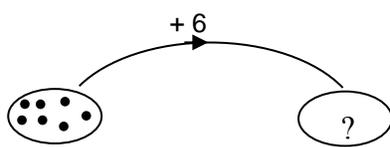
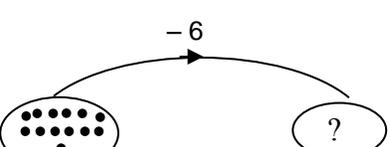
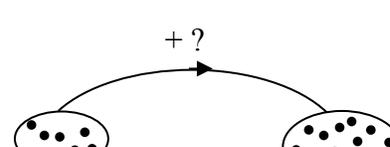
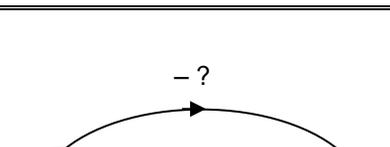
Les problèmes présentés dans les tableaux qui suivent semblent similaires en raison de leur contexte. Mais, pour les élèves, chaque situation représente un problème particulier. C'est en maîtrisant ces divers types de problèmes que les élèves acquièrent une maîtrise de l'addition et de la soustraction.

La multiplication représente le résultat du rassemblement d'objets à partir de groupes égaux, alors que la division représente la répartition d'objets en groupes égaux. Pour développer le sens de ces deux opérations, il faut reconnaître les trois quantités sous-jacentes à la multiplication et à la division : la quantité totale, le nombre de groupes égaux et la taille de chaque groupe. Encore une fois, il est important de faire travailler les élèves à tous les types de problèmes représentant les différents sens de la multiplication et de la division.

Les tableaux *Les structures additives* et *Les structures multiplicatives* des pages suivantes présentent les différents sens de l'addition et de la soustraction de même que ceux de la multiplication et de la division qui, selon le document *Progression des apprentissages*, sont à exploiter avec les élèves.

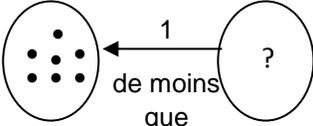
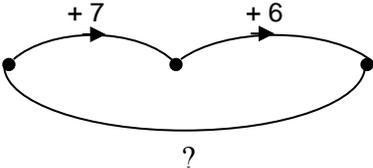
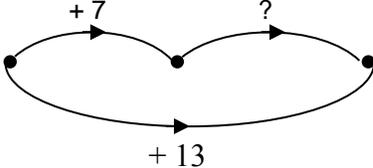
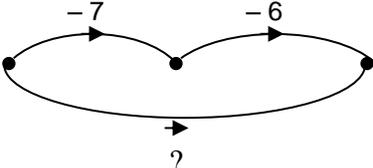
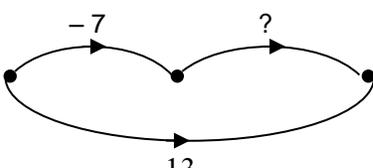
LES STRUCTURES ADDITIVES

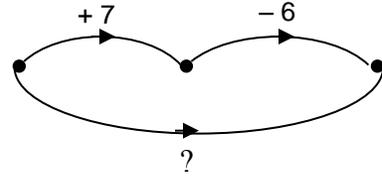
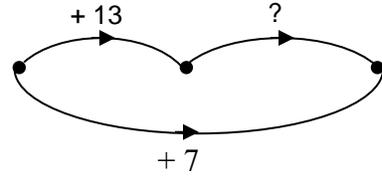
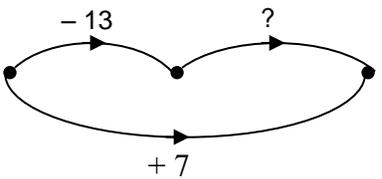
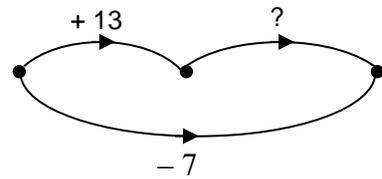
Les techniques opératoires, les liens entre les opérations et les propriétés des opérations n'ont réellement de sens que lorsqu'ils sont au service de situations à mathématiser et à résoudre. Les structures additives concernent l'addition et la soustraction, peu importe le type de nombres. À chaque cycle de l'enseignement primaire, la variété des situations présentées est essentielle : transformation (ajout ou retrait), réunion, comparaison (de plus ou de moins), composition de transformations (positive, négative ou mixte). Les élèves n'ont pas à connaître ou à retenir les différents noms associés aux structures. Ils ont plutôt à développer leur propre représentation de ces structures. Le tableau ci-dessous présente une diversité de situations avec des niveaux de difficulté fort différents de l'une à l'autre.

La structure ou le sens	La situation ⁴	Un modèle (selon la situation, l'élève créera ses propres représentations)	L'équation
Transformation (ajout) Recherche de l'état final	Gustave a 7 objets. Mélanie lui en donne 6. Combien Gustave a-t-il d'objets?		$7 + 6 = \square$
Transformation (retrait) Recherche de l'état final	Gustave a 13 objets. Il en donne 6 à Mélanie. Combien d'objets Gustave a-t-il maintenant?		$13 - 6 = \square$
Transformation (ajout) Recherche de la transformation	Gustave a 7 objets. Mélanie lui en donne. Maintenant, Gustave en a 13. Combien d'objets Mélanie a-t-elle donnés à Gustave?		$7 + \square = 13$
Transformation (retrait) Recherche de la transformation	Gustave a 13 objets. Il en donne à Mélanie. Maintenant, Gustave en a 7. Combien Gustave a-t-il donné d'objets à Mélanie?		$13 - \square = 7$

4. Les exemples suivants ne comportent que deux données. L'enseignant veillera cependant à proposer des situations pouvant comporter plusieurs données, impliquant plusieurs sens, comprenant des données superflues ou manquantes.

<p>Transformation (ajout)</p> <p>Recherche de l'état initial</p>	<p>Gustave a des objets. Mélanie lui en donne 6. Maintenant, Gustave en a 13.</p> <p>Combien Gustave avait-il d'objets?</p>		$\square + 6 = 13$
<p>Transformation (retrait)</p> <p>Recherche de l'état initial</p>	<p>Gustave a un certain nombre d'objets. Il en donne 6 à Mélanie. Il a maintenant 7 objets.</p> <p>Combien Gustave avait-il d'objets?</p>		$\square - 6 = 7$
<p>Réunion (union)</p> <p>Recherche de l'ensemble</p>	<p>Gustave a 7 objets. Mélanie en a 6.</p> <p>Combien en ont-ils ensemble?</p>		$7 + 6 = \square$
<p>Réunion (union)</p> <p>Recherche d'un sous-ensemble (complément)</p>	<p>Mélanie et Gustave ont 13 objets ensemble. Gustave en a 7.</p> <p>Combien Mélanie en a-t-elle?</p>		$7 + \square = 13$ $13 - 7 = \square$
<p>Comparaison (« de plus »)</p> <p>Recherche de la comparaison</p>	<p>Gustave a 7 objets. Mélanie en a 6.</p> <p>Combien Gustave a-t-il d'objets de plus que Mélanie?</p>		$7 = 6 + \square$ $7 - \square = 6$
<p>Comparaison (« de moins »)</p> <p>Recherche de la comparaison</p>	<p>Gustave a 7 objets. Mélanie en a 6.</p> <p>Combien Mélanie a-t-elle d'objets de moins que Gustave?</p>		$7 = 6 + \square$ $7 - \square = 6$
<p>Comparaison (« de plus »)</p> <p>Recherche d'un ensemble</p>	<p>Gustave a 7 objets. Il a 1 objet de plus que Mélanie.</p> <p>Combien Mélanie a-t-elle d'objets?</p>		$7 - 1 = \square$ $7 = \square + 1$

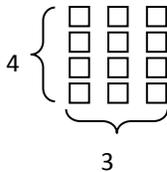
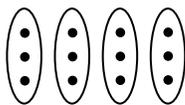
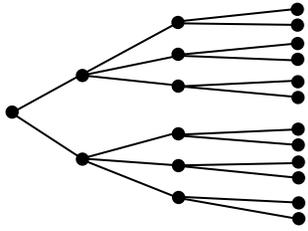
<p>Comparaison (« de moins »)</p> <p>Recherche d'un ensemble</p>	<p>Gustave a 7 objets. Mélanie a 1 objet de moins que Gustave.</p> <p>Combien Mélanie a-t-elle d'objets?</p>		$7 - 1 = \square$ $7 = \square + 1$
<p>Composition de transformations (positive)</p> <p>Recherche du gain</p>	<p>Hier, Gustave a reçu 7 objets. Aujourd'hui, il en reçoit encore 6.</p> <p>Combien d'objets a-t-il reçus en 2 jours?</p>		$7 + 6 = \square$
<p>Composition de transformations (positive)</p> <p>Recherche d'une transformation</p>	<p>Hier, Gustave a reçu 7 objets. Aujourd'hui, il en reçoit encore, mais on ne sait pas combien.</p> <p>Sachant que, depuis 2 jours, il a reçu 13 objets, a-t-il plus ou moins d'objets aujourd'hui et combien?</p>		$7 + \square = 13$
<p>Composition de transformations (négative)</p> <p>Recherche de la perte</p>	<p>Hier, Gustave a donné 7 objets. Aujourd'hui, il en a donné 6.</p> <p>Combien d'objets a-t-il donnés depuis 2 jours?</p>		$7 + 6 = \square$
<p>Composition de transformations (négative)</p> <p>Recherche d'une transformation</p>	<p>Hier, Gustave a donné 7 objets. Aujourd'hui, il en donne encore mais, on ne sait pas combien.</p> <p>Sachant que, depuis 2 jours, il a donné 13 objets, combien d'objets a-t-il donnés aujourd'hui?</p>		$7 + \square = 13$

<p>Composition de transformations (mixte)⁵</p> <p>Recherche du gain ou de la perte</p>	<p>Gustave a reçu 7 objets hier. Aujourd'hui, il en a donné 6.</p> <p>Combien d'objets a-t-il de plus ou de moins en 2 jours?</p>		$7 - 6 = \square$
<p>Composition de transformations (mixte)</p> <p>Recherche d'une transformation</p>	<p>Gustave a reçu 13 objets hier.</p> <p>Sachant que, depuis 2 jours, il a reçu 7 objets, combien d'objets a-t-il reçus ou donnés aujourd'hui?</p>		$13 - \square = 7$
<p>Composition de transformations (mixte)</p> <p>Recherche d'une transformation</p>	<p>Gustave a donné 13 objets hier.</p> <p>Sachant que, depuis 2 jours, il a reçu 7 objets, combien d'objets a-t-il reçus ou donnés aujourd'hui?</p>		$-13 + \square = 7$
<p>Composition de transformations (mixte)</p> <p>Recherche d'une transformation</p>	<p>Gustave a reçu 13 objets hier.</p> <p>Sachant que, depuis 2 jours, il a donné 7 objets, combien d'objets a-t-il reçus ou donnés aujourd'hui?</p>		$13 - \square = -7$

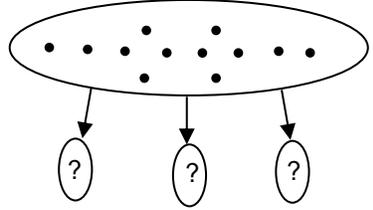
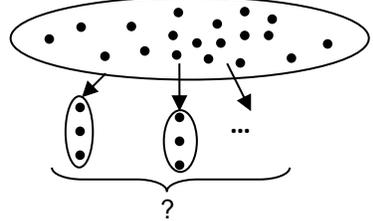
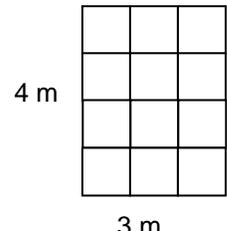
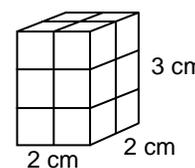
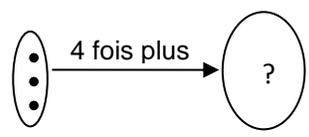
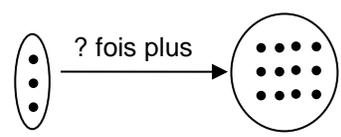
5. Les problèmes de composition de transformations (mixte) nécessitent l'utilisation des nombres entiers. Ils seront résolus, au 3^e cycle du primaire, à l'aide d'un schéma ou d'une droite numérique.

LES STRUCTURES MULTIPLICATIVES

Les techniques opératoires, les liens entre les opérations et les propriétés des opérations n'ont réellement de sens que lorsqu'ils sont au service de situations à mathématiser et à résoudre. Les *structures multiplicatives* concernent la multiplication et la division, peu importe le type de nombres. Dans l'enseignement, la variété des situations présentées aux élèves est beaucoup plus importante que les différents noms associés aux structures telles que : addition répétée, combinaison ou produit cartésien, arrangement rectangulaire, aire et volume, comparaison (fois plus que), soustraction répétée, partage, contenance, comparaison (fois moins que). Le tableau ci-dessous présente une diversité de situations présentant des niveaux de difficulté fort différents.

La structure ou le sens	La situation ⁶	Un modèle (selon la situation, l'élève créera ses propres représentations)	L'équation																				
Disposition rectangulaire	Dans la classe, il y a 3 rangées contenant chacune 4 pupitres. Combien y a-t-il de pupitres dans cette classe?		$3 \times 4 = \square$ ou $4 \times 3 = \square$																				
Addition répétée	Gustave reçoit 3 objets par jour. Combien d'objets reçoit-il en 4 jours?		$3 + 3 + 3 + 3 = \square$ $3 \times 4 = \square$ ou $4 \times 3 = \square$																				
Combinatoire	Produit cartésien Gustave a 4 chemises et 3 pantalons. Combien d'ensembles peut-il porter?	<table border="1" data-bbox="816 1167 1192 1346"> <thead> <tr> <th></th> <th>C1</th> <th>C2</th> <th>C3</th> <th>C4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>P1</th> <td>P1C1</td> <td>P1C2</td> <td>P1C3</td> <td>P1C4</td> </tr> <tr> <th>P2</th> <td>P2C1</td> <td>P2C2</td> <td>P2C3</td> <td>P2C4</td> </tr> <tr> <th>P3</th> <td>P3C1</td> <td>P3C2</td> <td>P3C3</td> <td>P3C4</td> </tr> </tbody> </table>		C1	C2	C3	C4	P1	P1C1	P1C2	P1C3	P1C4	P2	P2C1	P2C2	P2C3	P2C4	P3	P3C1	P3C2	P3C3	P3C4	$4 \times 3 = \square$ ou $3 \times 4 = \square$
		C1	C2	C3	C4																		
P1	P1C1	P1C2	P1C3	P1C4																			
P2	P2C1	P2C2	P2C3	P2C4																			
P3	P3C1	P3C2	P3C3	P3C4																			
Arbre	À la cafétéria, on offre 2 choix de soupe, 3 mets principaux et 2 desserts. Combien de menus différents peut-on prendre?		$2 \times 3 \times 2 = \square$																				

⁶ Les exemples suivants ne comportent généralement que deux données. L'enseignant veillera cependant à proposer des situations pouvant comporter plusieurs données, impliquant plusieurs sens, comprenant des données superflues ou manquantes.

Partage	<p>Dans un sac, il y a 12 objets. On les distribue également à 3 amis.</p> <p>Combien chaque ami recevra-t-il d'objets?</p>		$12 \div 3 = \square$
Contenance	<p>On veut placer 12 objets dans des sacs. Chaque sac en contient 3.</p> <p>Combien de sacs sont nécessaires?</p>		$12 \div \square = 3$
Aire	<p>Une plate-bande mesure 4 m de largeur par 3 m de longueur.</p> <p>Quelle est l'aire de cette plate-bande?</p>		$4 \times 3 = \square$ ou $3 \times 4 = \square$
Volume	<p>Une boîte ayant la forme d'un prisme à base rectangulaire mesure 2 cm de largeur, 2 cm de profondeur et 3 cm de hauteur.</p> <p>Quel est le volume de cette boîte?</p>		$2 \times 2 \times 3 = \square$ $2 \times 3 \times 2 = \square$ ou ...
Comparaison (« fois plus ») Recherche d'un des ensembles	<p>Gustave a 3 objets. Mélanie en a 4 fois plus.</p> <p>Combien d'objets Mélanie a-t-elle?</p>		$3 \times 4 = \square$
Comparaison (« fois plus ») Recherche de la relation	<p>Gustave a 3 objets et Mélanie en a 12.</p> <p>Mélanie a combien de fois plus d'objets que Gustave?</p>		$3 \times \square = 12$ ou $12 \div 3 = \square$
Comparaison (« fois moins ») Recherche d'un des ensembles	<p>Gustave a 12 objets. C'est 4 fois plus que Mélanie.</p> <p>Combien d'objets Mélanie a-t-elle?</p>		$12 \div 4 = \square$

<p>Comparaison (« fois moins »)</p> <p>Recherche de la relation</p>	<p>Gustave a 12 objets et Mélanie en a 3.</p> <p>Mélanie a combien de fois moins d'objets que Gustave?</p>		<p>$12 \div \square = 3$ ou $12 \div 3 = \square$</p>
---	--	--	---

LES OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES

Les processus personnels et conventionnels

Sur le plan des processus, l'élève imagine spontanément des façons personnelles de faire, en se servant d'instruments ou de la technologie, et les explore pour en comprendre le fonctionnement. Ainsi, les opérations arithmétiques peuvent être d'abord réalisées suivant des processus intuitifs relativement peu structurés se substituant aux algorithmes reconnus. Les mesures peuvent s'effectuer avec des objets quelconques tenant lieu d'unités de mesure. (Programme de formation, p. 128)

Toutefois, la mathématique fait appel à des processus et à des instruments qui lui sont propres et qui, au fil de l'histoire, ont acquis un caractère conventionnel bien établi. Aussi, en matière d'appropriation des instruments, le but de l'enseignement est-il d'en arriver à ce que les élèves, tout en construisant le sens de la mesure, parviennent à utiliser à bon escient, en comprenant ce qu'ils font, ces moyens conventionnels. (Programme de formation, p. 128)

Au fur et à mesure qu'il développe son sens du nombre et des opérations, l'élève est appelé à construire des processus personnels et à utiliser des processus conventionnels. Pour amener les élèves à mieux comprendre les algorithmes conventionnels, ils doivent construire leurs propres techniques de calcul. Cette étape ne doit pas être escamotée, et ce, même si certains parents ou enseignants ont de la difficulté à admettre que d'autres méthodes que l'algorithme conventionnel soient aussi efficaces.

Pour calculer correctement, les élèves utilisent divers modèles concrets, semi-concrets et symboliques pour développer le sens du nombre et le sens des opérations. Au départ, l'élève fait une simulation du problème en le mimant, exécute la simulation à l'aide de dessins, d'objets réels ou de matériel de manipulation (doigts, jetons, cubes, etc.). Il recourt à la comptine de nombres, dénombre des unités, regroupe, défait des paquets, déplace des objets, ajoute, retire, réunit, partage et dessine ses actions mathématiques.

Ensuite, l'élève sera amené à explorer les stratégies inventées ou ses processus personnels : *toute stratégie qui n'est pas un algorithme traditionnel et qui ne comporte ni utilisation de matériel de manipulation ni dénombrement d'unités. Ces stratégies inventées sont également qualifiées de stratégies flexibles et personnalisées*⁷. Ces processus personnels ne se limitent pas à rendre le calcul plus facile, leur développement et leur utilisation régulière offrent bien des avantages :

- *Les concepts en base dix sont renforcés* : valeur de position et décomposition des nombres.
- *Les élèves font moins d'erreurs parce qu'ils utilisent des méthodes qu'ils comprennent.*
- *Il est moins nécessaire de reprendre l'enseignement. Les élèves utilisent rarement une stratégie inventée qu'ils ne comprennent pas. Les liens entre les idées sous-jacentes et le sens des nombres sont solides, ce qui confère aux stratégies un caractère plus permanent. À l'inverse, on remarque que les élèves ont*

7. John A. VAN DE WALLE et LouAnn H. LOVIN, *L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage*, Tome 1, p. 167.

souvent recours aux algorithmes traditionnels sans pouvoir expliquer pourquoi ils fonctionnent.

- *Les stratégies inventées offrent un point de départ pour le calcul mental et l'estimation.*
- *Flexibles, les stratégies inventées sont souvent plus rapides que les algorithmes traditionnels⁸.*

Les processus personnels de calcul sont axés sur les nombres plutôt que sur chacun des chiffres du nombre comme les processus conventionnels de calcul, ce qui offre l'avantage de faire des liens avec la reconnaissance de la base dix du système de numération. De plus, les processus personnels, en favorisant le calcul à partir de la gauche, permettent d'entrevoir rapidement l'ordre de grandeur de la réponse. Finalement, les processus personnels sont flexibles et non rigides. Ils permettent d'employer plusieurs stratégies pour calculer et de s'adapter aux nombres à calculer. Ces processus personnels qui sont le résultat de la compréhension et du cheminement de l'élève peuvent varier grandement d'un élève à l'autre, mais ils sont tous fondés sur les relations entre les nombres et les opérations.

En classe, l'enseignant veillera à animer des échanges mathématiques portant sur les processus personnels de calcul. Ces échanges amènent le partage de processus personnels et favorisent l'établissement de liens entre les diverses façons de procéder des élèves. Ainsi, les processus personnels de chaque élève s'améliorent et deviennent plus efficaces alors qu'ils font des liens entre ceux-ci. Pendant ces échanges, l'enseignant oriente la discussion en recourant aux processus personnels que les élèves ont utilisés pour faire comprendre des concepts mathématiques et

pour faire développer les apprentissages des élèves vers des méthodes efficaces. De cette manière, et avec le temps, cette compréhension des processus permettra aux élèves de mieux choisir un modèle de résolution de problème selon le contexte. Aussi, l'échange en classe portant sur les processus personnels permettra aux élèves ayant des difficultés à élaborer leurs propres processus de pouvoir « s'approprier », en les comprenant bien, les processus efficaces des autres.

Le rôle de l'enseignant est d'aider les élèves à l'organisation des traces claires et complètes de leur raisonnement, de faire dire ce que les élèves font, d'aider à faire des liens permettant ainsi de comprendre les concepts associés aux actions posées pendant l'opération. Il demande à l'élève de modéliser un processus, ou le modélise lui-même, en s'assurant d'expliquer le raisonnement qui s'y rattache. L'enseignant présentera une variété de situations de résolution de problèmes. Cette diversité permettra à l'élève de se constituer un bagage plus grand de modèles de représentation, d'étendre ses habiletés, de faire davantage de liens et de développer une malléabilité à l'utilisation des opérations.

Puis, l'apprentissage des processus conventionnels sera développé chez l'élève. Il est important que l'élève qui utilise un processus conventionnel, comme tout autre processus, comprenne son fonctionnement et soit en mesure de l'expliquer. Une transition graduelle à partir du matériel de manipulation vers le processus traditionnel opératoire aidera à la compréhension de celui-ci. L'algorithme traditionnel, une fois bien compris, sera une méthode de plus à conserver au répertoire de calculs de l'élève.

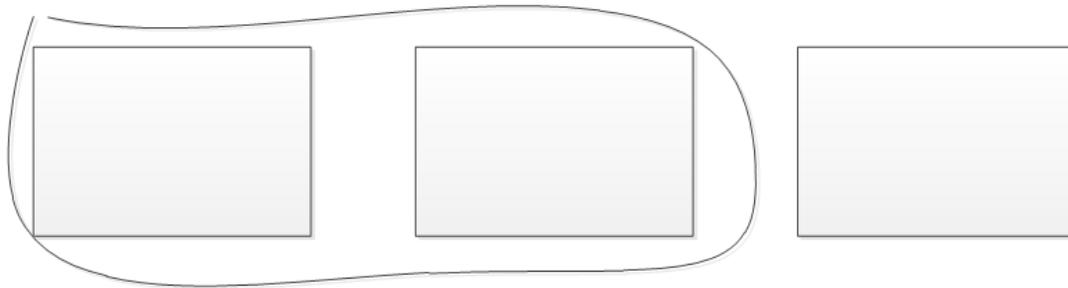
8. Idem, p. 168.

Quelques exemples de processus de calcul

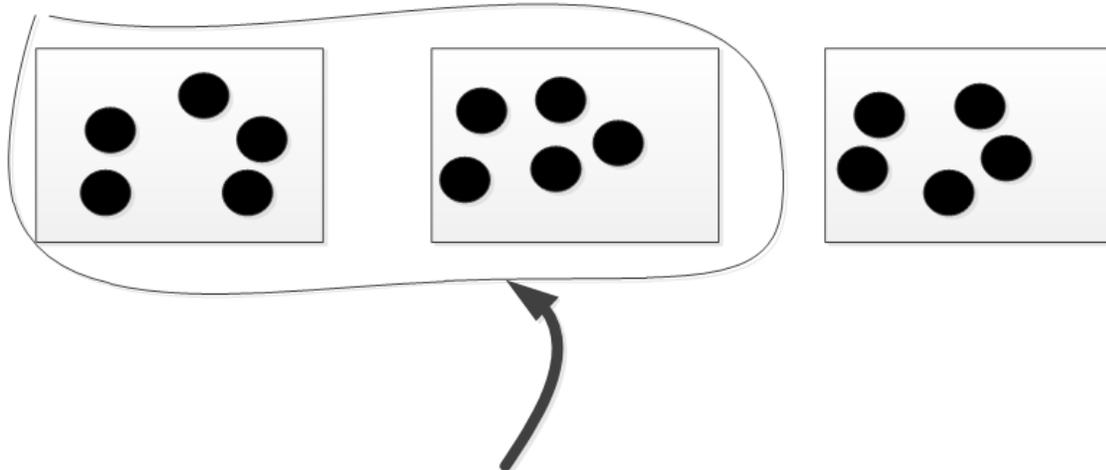
Marie donne les $\frac{2}{3}$ de ses 15 billes. Combien de billes donnera-t-elle?

■ Processus personnel

1 – Voici la représentation de $\frac{2}{3}$



2 – Je distribue mes 15 billes dans mes tiers pour connaître combien ça représente de billes.



3 – Voilà, le $\frac{2}{3}$ de 15 billes, ça fait 10 billes. Marie donnera 10 billes.

■ Processus conventionnel

1- $\frac{2}{3}$ de 15 billes

2- Je prends 15 et je le partage en 3 parts

$$15 \div 3 = 5$$

3- J'en prends 2 parts

$$5 \times 2 = 10$$

4- Marie donnera 10 billes.

■ Processus conventionnel

$\frac{2}{3}$ de 15 billes

$15 \times 2 \div 3 = 10$, Marie donnera 10 billes.

Le calcul mental

À la fin du troisième cycle, l'élève mobilise des processus personnels et conventionnels de calcul mental et écrit pour les quatre opérations sur les nombres naturels et les nombres décimaux. (Programme de formation, p. 131)

Le calcul mental est l'exécution de calculs sans l'aide, ou presque, d'un crayon ou d'un papier, ou encore d'une calculatrice. Le calcul mental n'est pas l'application d'un algorithme dans sa tête, mais l'utilisation de processus souples et variés de calcul efficace. On fait appel au calcul mental pour faire une approximation (estimation de l'ordre de grandeur) ou pour déterminer un résultat précis.

L'habileté de calcul mental peut être développée en situation d'apprentissage de différentes manières : sous forme de jeux, en situation guidée ou en situation

d'apprentissage autonome. L'enseignant invite les élèves à échanger sur leurs stratégies de calcul mental utilisées pour faire ressortir les ressemblances et les différences entre les stratégies, de même que leurs forces et leurs limites. L'enseignant aide les élèves à faire des liens et à s'approprier d'autres stratégies de calcul mental.

Dans ce contexte, le sens du nombre est grandement sollicité. Il faut être particulièrement à l'aise avec la valeur de position, la décomposition de nombres, la recherche de l'ordre de grandeur et le passage d'une forme d'écriture à une autre. On met également à profit le sens des opérations par l'utilisation efficace des relations entre les opérations ainsi que leurs propriétés. Ces processus de calcul découlent souvent d'un transfert des modèles utilisés au cours de l'apprentissage du sens des opérations.

Le tableau qui suit présente quelques exemples de stratégies de calcul mental.

Processus	Exemple	Connaissances
Additionner en complétant le premier terme à la dizaine	$47 + 14 = 47 + (3 + 11)$ $= (47 + 3) + 11$ $= 50 + 11$ $= 61$	Valeur de position Décomposition Associativité
Additionner en complétant le premier terme à la dizaine Compensation	$37 + 16 = 37 + 3 + 16 - 3$ $= 40 + 16 - 3$ $= 56 - 3$ $= 53$	Associativité
Additionner les dizaines, puis additionner les unités	$49 + 28 = 40 + 9 + 20 + 8$ $= 40 + 20 + 9 + 8$ $= 60 + 17$ $= 77$	Valeur de position Décomposition Commutativité
Soustraire les dizaines, puis les unités	$46 - 12 = 46 - 10 - 2$ $= (46 - 10) - 2$ $= 36 - 2$ $= 34$	Valeur de position Décomposition
Soustraire en complétant le deuxième terme à la dizaine	$54 - 18 = 54 - 20 + 2$ $= (54 - 20) + 2$ $= 34 + 2$ $= 36$	Valeur de position Décomposition

Soustraire en faisant apparaître le même nombre d'unités Compensation	$51 - 38 = 51 + 7 - 38 - 7$ $= (58 - 38) - 7$ $= 20 - 7$ $= 13$	Décomposition
Multiplier en décomposant le multiplicande (1 ^{er} facteur)	$23 \times 4 = (20 + 3) \times 4$ $= (20 \times 4) + (3 \times 4)$ $= 80 + 12$ $= 92$	Décomposition Distributivité
Multiplier en décomposant le multiplicateur (2 ^e facteur)	$23 \times 12 = 23 \times (10 + 2)$ $= (23 \times 10) + (23 \times 2)$ $= 230 + 46$ $= 276$	Décomposition Distributivité
Pour multiplier par 4 ou 8, multiplier par 2 deux fois ou trois fois	$13 \times 4 = 13 \times 2 \times 2$ $= 26 \times 2$ $= 52$	Décomposition (en facteurs premiers)
Pour multiplier par 6, multiplier par 2, puis multiplier par 3 ou vice versa	$15 \times 6 = 15 \times 2 \times 3$ $= 30 \times 3$ $= 90$	Décomposition (en facteurs premiers)
Pour multiplier par 5, multiplier par 10, puis diviser par 2 ou vice versa	$28 \times 5 = 28 \times 10 \div 2$ $= (28 \times 10) \div 2$ $= 280 \div 2$ $= 140$	$28 \times 5 = 28 \div 2 \times 10$ $= (28 \div 2) \times 10$ $= 14 \times 10$ $= 140$
Diviser en faisant apparaître dans le dividende un multiple du diviseur	$42 \div 3 = (30 + 12) \div 3$ $= (30 \div 3) + (12 \div 3)$ $= 10 + 4$ $= 14$	Décomposition Distributivité
Diviser en faisant apparaître dans le dividende un multiple du diviseur	$54 \div 3 = (60 - 6) \div 3$ $= (60 \div 3) - (6 \div 3)$ $= 20 - 2$ $= 18$	Décomposition Distributivité
Diviser en scindant le diviseur en plusieurs facteurs	$54 \div 18 = (54 \div 2) \div 9$ $= 27 \div 9$ $= 3$	Décomposition en facteurs
Pour diviser par 5, multiplier par 2, puis diviser par 10 ou vice versa	$140 \div 5 = 140 \times 2 \div 10$ $= 280 \div 10$ $= 28$	$140 \div 5 = 140 \div 10 \times 2$ $= 14 \times 2$ $= 28$
Compensation	$80 \times 0,3 = (80 \div 10) \times (0,3 \times 10)$ $= 8 \times 3$ $= 24$	
Multiples d'un même nombre Compensation	$3500 \div 500 = (3500 \div 100) \div (500 \div 100)$ $= 35 \div 5$ $= 7$	

Utilisation de la technologie

L'utilisation de la technologie peut s'avérer un outil précieux pour supporter la démarche de résolution de situations-problèmes, favoriser la compréhension de concepts et de processus et augmenter l'efficacité des élèves dans l'exécution des tâches qui leur sont proposées. (Programme de formation, p. 125)

Sur le plan des processus, l'élève imagine spontanément des façons personnelles de faire, en se servant d'instruments ou de la technologie, et les explore pour en comprendre le fonctionnement. (Programme de formation, p. 128)

À tous les cycles, l'utilisation de la calculatrice doit se faire, à bon escient, comme outil de vérification ou outil d'apprentissage (ex. : régularité, décomposition d'un nombre, priorité des opérations). (Progression des apprentissages, p. 11)

Il est important de laisser les élèves se servir des outils technologiques comme l'ordinateur et la calculatrice, car ils occupent une place importante dans la vie quotidienne des élèves. Cependant, les jeunes associent souvent l'utilisation de la calculatrice à la « facilité » de faire un calcul sans comprendre qu'elle n'affiche que le résultat d'un calcul et non pas la solution d'un problème. Il faudra donc enseigner aux élèves l'utilisation « réfléchie » de la calculatrice.

La calculatrice sera utile en classe pour résoudre une situation-problème mathématique comportant plusieurs étapes, car les élèves doivent tout de même comprendre le problème et décider des calculs à faire, l'accent n'étant pas mis sur les processus de calcul,

mais plutôt sur le raisonnement, la recherche et la mise en place de stratégies mobilisant des connaissances. Elle sera utile aussi au moment de faire la preuve des opérations ou encore pour effectuer des opérations sur des nombres dépassant les limites du programme.

Pour être capables de faire un bon usage de l'outil, les élèves doivent interpréter les données du problème et les entrer conformément, d'où l'importance de bien connaître les fonctions de la calculatrice. Ils doivent aussi être capables d'interpréter les nombres apparaissant à la fenêtre d'affichage, surtout les nombres décimaux lorsqu'ils proviennent d'une division (ex. : les élèves pourraient interpréter 7.5 comme étant 7 reste 5 plutôt que 7 et 5 dixièmes).

Quant à l'ordinateur, il trouvera son utilité pour...

- appliquer différentes stratégies de résolution de problèmes (logiciel de dessin, tableur et simulation);
- diffuser l'information relative à la solution (traitement de texte, logiciel de dessin et tableur);
- rechercher des données;
- faire des représentations graphiques de données (tableur);
- produire des dessins de solides, figures planes, frises et dallages (logiciel de dessin);
- simuler des expériences aléatoires;
- consulter des sites Web à caractère mathématique, des lexiques et des bases de données;
- participer à des sites Web interactifs en mathématique.

LA MANIPULATION ET LE MATÉRIEL DE MANIPULATION

L'élève utilise prioritairement du matériel de manipulation. (Programme de formation, p. 128)

L'apprentissage du raisonnement en mathématique et l'appropriation des concepts et des processus requis, comme tous les autres apprentissages, seront d'autant plus faciles et riches que les mises en situation pédagogiques seront concrètes ou accessibles. (Programme de formation, p. 129)

Plusieurs auteurs affirment que c'est en « touchant du doigt » les concepts que les enfants arrivent le mieux à se les approprier. C'est à partir des images physiques que naissent les images mentales et les opérations mentales sont issues des actions concrètes. C'est à partir de la manipulation que les enfants peuvent le mieux exercer leurs activités mathématiques. Donc, bien comprise et utilisée, la manipulation sert de support à l'intériorisation des concepts et des processus mathématiques. C'est pourquoi les auteurs s'accordent à dire que la manipulation n'est jamais une perte de temps et qu'il faut accepter que l'élève puisse y revenir au besoin sans considérer qu'il y ait régression.

Mais, attention! Le matériel de manipulation n'est pas synonyme de concept. Un modèle (un objet, une image ou un dessin) peut aider à voir les relations qu'un concept suppose et peut aider à en parler, mais

il n'est pas le concept lui-même. *Il est erroné d'affirmer qu'un modèle « illustre » un concept. Illustrer, c'est montrer. Cela signifierait que, en regardant le modèle, on verrait un exemple du concept. En fait, vous n'observez que l'objet physique; seul votre esprit peut associer la relation mathématique à l'objet* (Thompson, 1994). *Pour une personne qui ne connaît pas cette relation, rien ne relie le modèle au concept. Les concepts mathématiques sont des relations construites dans notre esprit*⁹. Le danger est que les élèves utilisent le matériel de façon mécanique sans faire les liens avec les concepts mathématiques. L'enseignant doit s'assurer qu'il y ait vraiment apprentissage et non pas seulement une utilisation « irréfléchie » du matériel.

*Dans l'ensemble, les modèles et les outils mathématiques jouent un rôle similaire; autrement dit, ils servent de banc d'essai aux idées émergentes. Ces outils sont donc en quelque sorte des « jouets pour penser », des « jouets pour expérimenter » et des « jouets pour s'exprimer ». Il est difficile pour les élèves (de tout âge) de présenter et de vérifier des relations abstraites en utilisant seulement des mots. Les modèles leur fournissent de la matière à réflexion, à exploration, à raisonnement et à expression*¹⁰.

Le Programme de formation recommande le matériel concret ou semi-concret dans tous les champs de la mathématique et à tous les cycles d'apprentissage.

Le matériel concret est composé d'objets (collections réelles ou ensemble d'objets). On peut le classer selon sa nature :

- non structuré (ex. : jetons, billes, cubes emboîtables,...)
- structuré (ex. : réglettes Cuisenaire, matériel base dix)
- symbolique (ex. : abaque, compteur de points, boulier, monnaie)

9 John A. VAN DE WALLE et LouAnn H. LOVIN, *L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage*, Tome 3, ERPI, p. 7.

10 idem, p. 8.

Quelques exemples d'occasions d'utilisation de matériel de manipulation

- Compter ou réciter la comptine de nombres naturels à l'aide d'une grille de nombres.
- Dénombrer des collections réelles ou dessinées.
- Représenter des nombres naturels de différentes façons ou associer un nombre à un ensemble d'objets ou à des dessins.
 - Accent mis sur le groupement en utilisant le matériel aux groupements apparents et accessibles ou des dessins : *Il s'agit du matériel le plus facile à utiliser par les jeunes élèves qui commencent à apprendre la numération. Dans ce matériel, les unités sont apparentes dans le premier groupement; les élèves voient les 10 unités qui forment la dizaine, par exemple, et ces unités sont accessibles, c'est-à-dire que les élèves peuvent aller chercher 10 unités directement dans la dizaine. Cela vaut pour tous les groupements; ainsi, on voit les éléments qui composent le deuxième groupement. Ce type de matériel est fort utile pour les groupements et leur composition*¹¹ (ex. : jetons, cubes emboîtables...).
 - Accent mis sur l'échange en utilisant le matériel aux groupements apparents mais non accessibles : *Avec ce matériel, les unités ne sont pas directement accessibles. Les élèves ne peuvent retirer directement 10 unités qui composent la dizaine. Toutefois, ce type de matériel permet de voir les unités qui composent le premier groupement et les éléments qui composent les autres groupements. Ce type de matériel permet de voir une autre caractéristique de notre système de numération : l'échange. Il est fort utile pour les groupements et leur composition*¹² (ex. : matériel base dix).
 - Accent mis sur la valeur de position en utilisant un matériel aux groupements non apparents et non accessibles (groupements symboliques) : *Avec ce type de matériel, les groupements ne sont ni accessibles ni apparents : ils sont symboliques. Les élèves doivent donc se souvenir de la règle de groupement (dans notre système de numération, cette règle est régulière : on travaille en base dix avec des groupements réguliers). Comme il est plus difficile de travailler avec ce matériel, il sera introduit plus tard que les deux autres*¹³ (ex. : abaque, boulier, monnaie).
- Vérifier l'équivalence de deux fractions à l'aide de cartons se superposant ou à l'aide d'illustrations.
- Représenter des nombres décimaux à l'aide de matériel base dix ou d'illustrations.
- Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou d'équations et vice et versa (exploitation de différents sens de la multiplication et de la division).
- Développer des processus de calcul écrit (addition et soustraction) à l'aide de processus personnels, en utilisant du matériel concret ou des dessins..
- Comparer et construire des solides. *La manipulation d'images sur l'ordinateur semble faciliter l'apprentissage de la géométrie, car cet appareil permet certaines activités que l'on peut difficilement faire autrement*¹⁴.
- Construire des règles.
- Manipuler des unités de mesure conventionnelles.
- Expérimenter des activités liées au hasard en utilisant du matériel varié (ex. : roulettes, prismes à base rectangulaire, verres, billes, punaises, dés à 6, 8 ou 12 faces).

Il est important de se rappeler que la manipulation n'est pas une perte de temps, qu'elle est présente dans tous les champs de la mathématique, et ce, jusqu'à la fin du troisième cycle du primaire.

11. Louise POIRIER, *Enseigner les maths au primaire, notes didactiques*, ERPI, p. 38.

12. Idem, p. 39.

13. Idem, p. 39.

14. Idem, p. 135.

BIBLIOGRAPHIE

BLOUIN, P. *Dessine-moi un bateau : la multiplication par un et demi*, Éditions Bande Didactique, Montréal, 2002.

DE CHAMPLAIN et all., *Lexique mathématique – enseignement secondaire*, 2e édition revue et corrigée, édition du Triangle d'Or, 1996, 1035 p.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT, *Programme de formation de l'école québécoise, éducation primaire, enseignement préscolaire*, Gouvernement du Québec, 2001.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT, *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire, premier cycle*, Gouvernement du Québec, 2004.

PERREault, Nicole, Xavier ROEGIERS, Madeleine GAGNON, Ronald CÔTÉ, adaptation et mise à jour : LAFLAMME, Jacqueline, *Leximath*, deuxième édition, édition Beauchemin, 1991.

POIRIER, Louise, *Enseigner les maths au primaire, notes didactiques*, ERPI, Saint-Laurent, 2001.

VAN DE WALLE John A, et LouAnn H. LOVIN, *L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage*, ERPI, Saint-Laurent, 2007.

<http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/mathematique/>

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT, *Programme de formation de l'école québécoise, Progression des apprentissages au primaire, Mathématique*, Gouvernement du Québec, 2009.

<http://www.mels.gouv.qc.ca/progression/secondaire/mathematique/>

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT, *Programme de formation de l'école québécoise, Progression des apprentissages au secondaire, Mathématique*, Gouvernement du Québec, 2010.

RÉFÉRENCES

<http://www.atelier.on.ca>

L'@telier – Ressources pédagogiques en ligne