

# Probabilités et arithmétique: une intersection

---

France Caron  
Département de didactique  
Université de Montréal

# Probabilité

---

- Sens:

*Degré de certitude*

- Raison d'être:

*Pour traiter le hasard*

*Ou ce qu'on ne peut prédire avec certitude*

*Dans la représentation qu'on se fait  
d'une situation issue de la réalité*



# Présence des probabilités dans les « *Domaines généraux de formation* »

---

## **Santé et bien-être**

- Influence du mode de vie
- Sécurité

## **Orientation et entrepreneuriat**

- Assurances et actuariat
- Finance et gestion
- Simulateurs

## **Environnement et consommation**

- Météo et activité humaine
- Dangers écologiques
- Garantie prolongée
- Loterie et jeu

## **Média**

- Surmédiatisation
- Prédications

## **Vivre-ensemble et citoyenneté**

- Justice
- Équité
- Représentation

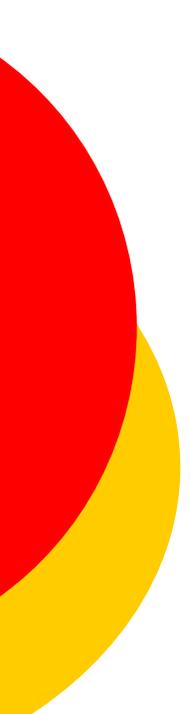
# Potentialités de l'enseignement des probabilités au primaire

---

- **Exposition précoce à un concept important et contre-intuitif**
  - Obstacles connus et documentés
  - Développement d'une nouvelle intuition
- **Mise à profit de l'intérêt spontané des élèves pour :**
  - Le jeu et les stratégies gagnantes
  - La sécurité et la certitude
  - L'équité et le hasard
- **Accès à des projets interdisciplinaires intéressants**

Mais le temps pour tout ça?  
Quand les autres contenus posent  
déjà tant de difficultés...

- **Exploitation des liens avec les autres contenus mathématiques**
  - Représentation graphique des résultats d'expériences aléatoires
  - Travail sur le sens des nombres (fractions, décimaux, %) et des opérations
- **Contribution au développement de compétences mathématiques**
  - Utilisation de représentations variées
  - Construction de modèles et utilisation de simulations
  - Raisonnement et résolution de problèmes



# Raisonner en probabilité

---

- En probabilité, l'élève est invité à travailler sur des phénomènes aléatoires en formulant, par exemple, ses conclusions en termes de *certain*, *possible* et *impossible*.
- Favoriser le développement de la compétence « Raisonner » implique le recours à des *situations-problèmes* qui vont forcer l'élève à *se questionner*, à *établir des liens* entre les éléments en présence et à *chercher des réponses* à son questionnement.

*Programme de formation de l'école québécoise, 2003*

# Est-ce le hasard qui décide ?

---

Ma	p'tite	vache	a	mal	aux	pattes
Ti-	rons	-la	par	la	queue	
Elle	i-	ra	bien	mieux		
Dans	un	jour	ou	deux		



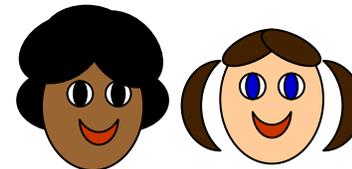
- Peut-on prédire sur qui la comptine va s'arrêter?
- Le jeu est-il juste?

# Est-ce le hasard qui décide ?

---

- Avec 2 joueurs  
on finit sur le 1<sup>er</sup>

Ma	p'tite
vache	a
mal	aux
pattes	Ti-
rons	-la
par	la
queue	Elle
i-	ra
bien	mieux
Dans	un
jour	ou
deux	

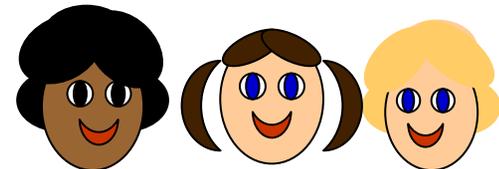


# Est-ce le hasard qui décide ?

---

- Avec 2 joueurs  
on finit sur le 1<sup>er</sup>
- Avec 3 joueurs  
on finit sur le 2<sup>e</sup>

Ma	p'tite	vache
a	mal	aux
pattes	Ti-	rons
-la	par	la
queue	Elle	i-
ra	bien	mieux
Dans	un	jour
ou	deux	

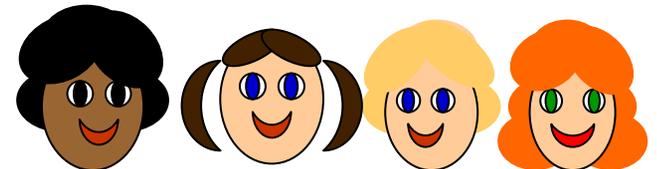


# Peut-on deviner ce qui suit ?

---

- Avec 2 joueurs  
on finit sur le 1<sup>er</sup>
- Avec 3 joueurs  
on finit sur le 2<sup>e</sup>
- Avec 4 joueurs  
on finit sur le 3<sup>e</sup>

Ma	p'tite	vache	a
mal	aux	pattes	Ti-
rons	-la	par	la
queue	Elle	i-	ra
bien	mieux	Dans	un
jour	ou	deux	



# Et à nouveau ?

---

- Avec 2 joueurs  
on finit sur le 1<sup>er</sup>
- Avec 3 joueurs  
on finit sur le 2<sup>e</sup>
- Avec 4 joueurs  
on finit sur le 3<sup>e</sup>
- Avec 5 joueurs  
on finit sur le 3<sup>e</sup>

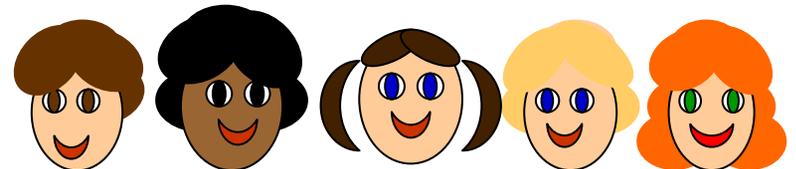
Ma	p'tite	vache	a	mal
----	--------	-------	---	-----

aux	pattes	Ti-	rons	-la
-----	--------	-----	------	-----

par	la	queue	Elle	i-
-----	----	-------	------	----

ra	bien	mieux	Dans	un
----	------	-------	------	----

jour	ou	deux
------	----	------



# Le « 5 » est-il malchanceux ?

---

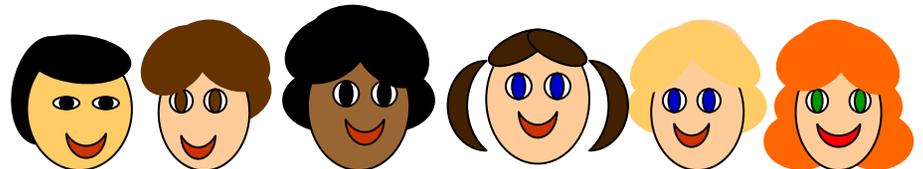
- Avec 2 joueurs  
on finit sur le 1<sup>er</sup>
- Avec 3 joueurs  
on finit sur le 2<sup>e</sup>
- Avec 4 joueurs  
on finit sur le 3<sup>e</sup>
- Avec 5 joueurs  
on finit sur le 3<sup>e</sup>
- Avec 6 joueurs  
on finit sur le 5<sup>e</sup>

Ma	p'tite	vache	a	mal	aux
----	--------	-------	---	-----	-----

pattes	Ti-	rons	-la	par	la
--------	-----	------	-----	-----	----

queue	Elle	i-	ra	bien	mieux
-------	------	----	----	------	-------

Dans	un	jour	ou	deux
------	----	------	----	------



# 23 syllabes à distribuer

Ma	p'tite
vache	a
mal	aux
pattes	Ti-
rons	-la
par	la
queue	Elle
i-	ra
bien	mieux
Dans	un
jour	ou
deux	

$$23 = 11 \times 2 + 1$$

Ma	p'tite	vache
a	mal	aux
pattes	Ti-	rons
-la	par	la
queue	Elle	i-
ra	bien	mieux
Dans	un	jour
ou	deux	

$$23 = 7 \times 3 + 2$$

Ma	p'tite	vache	a
mal	aux	pattes	Ti-
rons	-la	par	la
queue	Elle	i-	ra
bien	mieux	Dans	un
jour	ou	deux	

$$23 = 5 \times 4 + 3$$

*Enfin! Le reste  
a le beau rôle!!!*

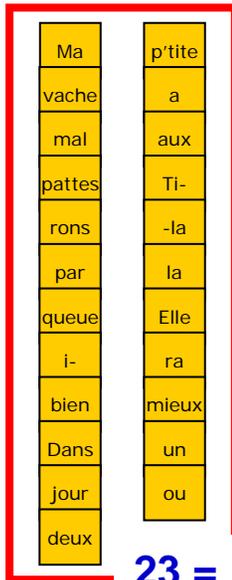
Ma	p'tite	vache	a	mal
aux	pattes	Ti-	rons	-la
par	la	queue	Elle	i-
ra	bien	mieux	Dans	un
jour	ou	deux		

$$23 = 4 \times 5 + 3$$

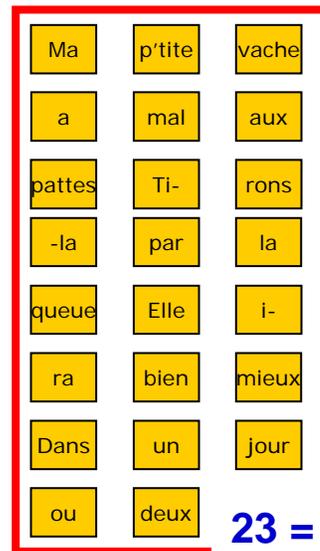
Ma	p'tite	vache	a	mal	aux
pattes	Ti-	rons	-la	par	la
queue	Elle	i-	ra	bien	mieux
Dans	un	jour	ou	deux	

$$23 = 3 \times 6 + 5$$

# 23 syllables à distribuer



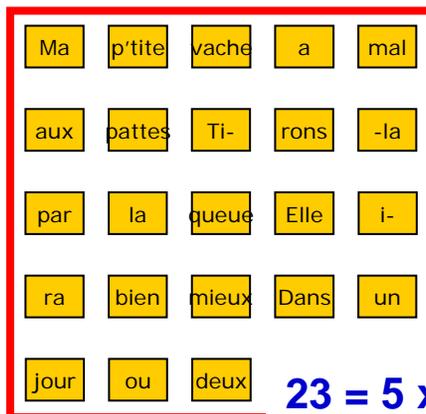
$$23 = 12 \times 2 - 1$$



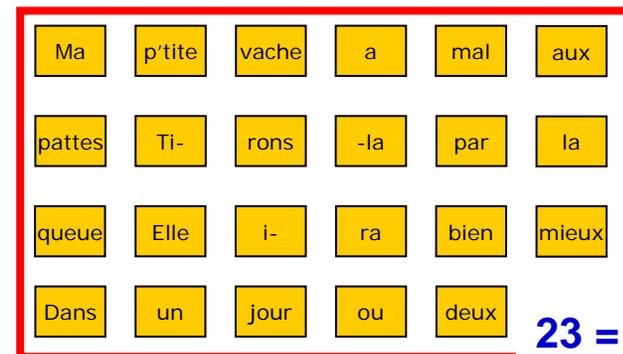
$$23 = 8 \times 3 - 1$$



$$23 = 6 \times 4 - 1$$



$$23 = 5 \times 5 - 2$$



$$23 = 4 \times 6 - 1$$

# Théorème de la p'tite vache

---

*En connaissant*

- *le nombre de pieds de la comptine*
- *le nombre de joueurs et leur ordre*

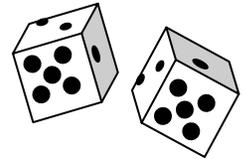
*et en supposant un découpage parfait des syllabes,  
on peut prédire **avec certitude** l'issue du jeu.  
(i.e. un seul résultat possible  
avec **probabilité = 1**).*



# Probabilité ? Quelle probabilité ?

1. **Approche théorique :** « rapport entre le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles pour un événement quelconque, **tous les cas étant considérés équiprobables** (également possibles) »

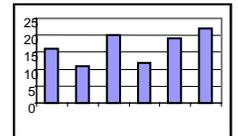
- contextes typiques : jeu, loterie
- valorise l'**analyse** plutôt que l'observation
- difficile à appliquer dans les autres contextes du quotidien



2. **Approche fréquentielle :** « mesure de la **fréquence relative** d'un événement particulier par rapport à une **classe de référence** » ou « rapport entre le nombre de fois où un événement se réalise et le nombre de fois où l'expérience a été réalisée »

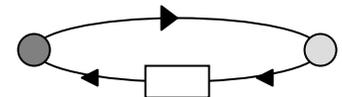
ex.  $\frac{\text{tous les fumeurs de 40-50 ans qui ont le cancer du poumon}}{\text{tous les fumeurs de 40-50 ans}} = 15\%$

- contextes : santé, accidents, assurances
- effet du hasard  $\Rightarrow$  **large échantillon** pour que cette mesure soit valable
- difficulté de parler d'un événement particulier ou individuel (hétérogénéité fréquente de la classe de référence)



3. **Approche subjective :** « évaluation numérique de la **force d'une croyance** »

- s'applique à des événements individuels
- nécessité de **calibrer** et de préserver la **cohérence**
- contextes : événements personnels (ex. performance à un examen), événements sociaux (ex. issue d'un match sportif ou d'un film)... et météo!



# Influence du contexte dans l'évaluation théorique de la probabilité

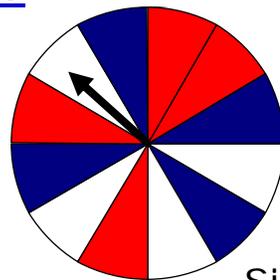
*Avec lequel des deux objets est-il plus probable de « tomber sur un rouge » ?*

- Deux situations semblables :  $(P(\text{rouge}) = 1/3)$
- Des stratégies d'élèves différentes (Maury, 1984)

## Stratégies justes

Nb favorables  
Nb Total

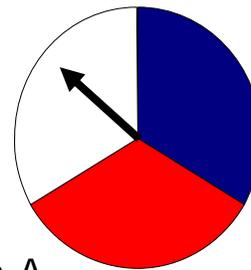
Passage par l'aire



Situation A

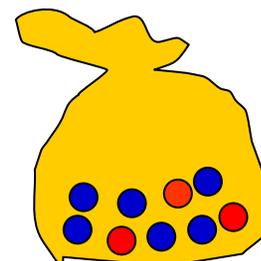
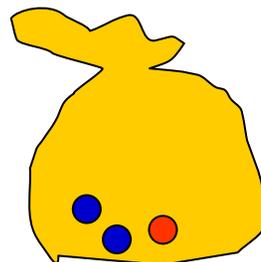
## Stratégies erronées

Prise en compte de la répartition des plages



Situation B

Nb favorables  
Nb défavorables



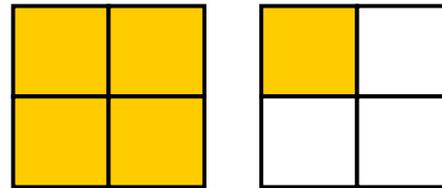
Nb favorables

Différence (défav - fav)

# La probabilité: l'absolu dans la relativité

---

- **Fraction** (pourcentage) : toujours définie par rapport à un tout.



5/4 ou 5/8 ???

- **Probabilité** : le tout = *l'univers des possibles*  
(au passé, présent ou futur)

Niveau élevé  
d'abstraction...

## Rupture avec les fractions:

*Définition implicite d'un tout universel, indépassable :*

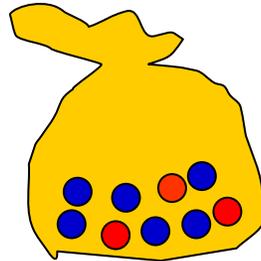
$$0 \leq \text{degré de certitude} \leq 1$$

# Vision théorique minimaliste

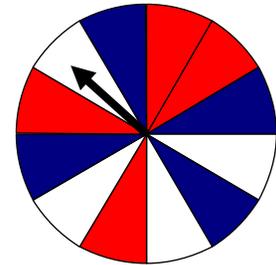
Approche théorique avec **événements simples équiprobables**:  
*Quelle est la probabilité :*



*que le dé tombe  
sur le 5?*



*qu'on tire une  
bille rouge?*



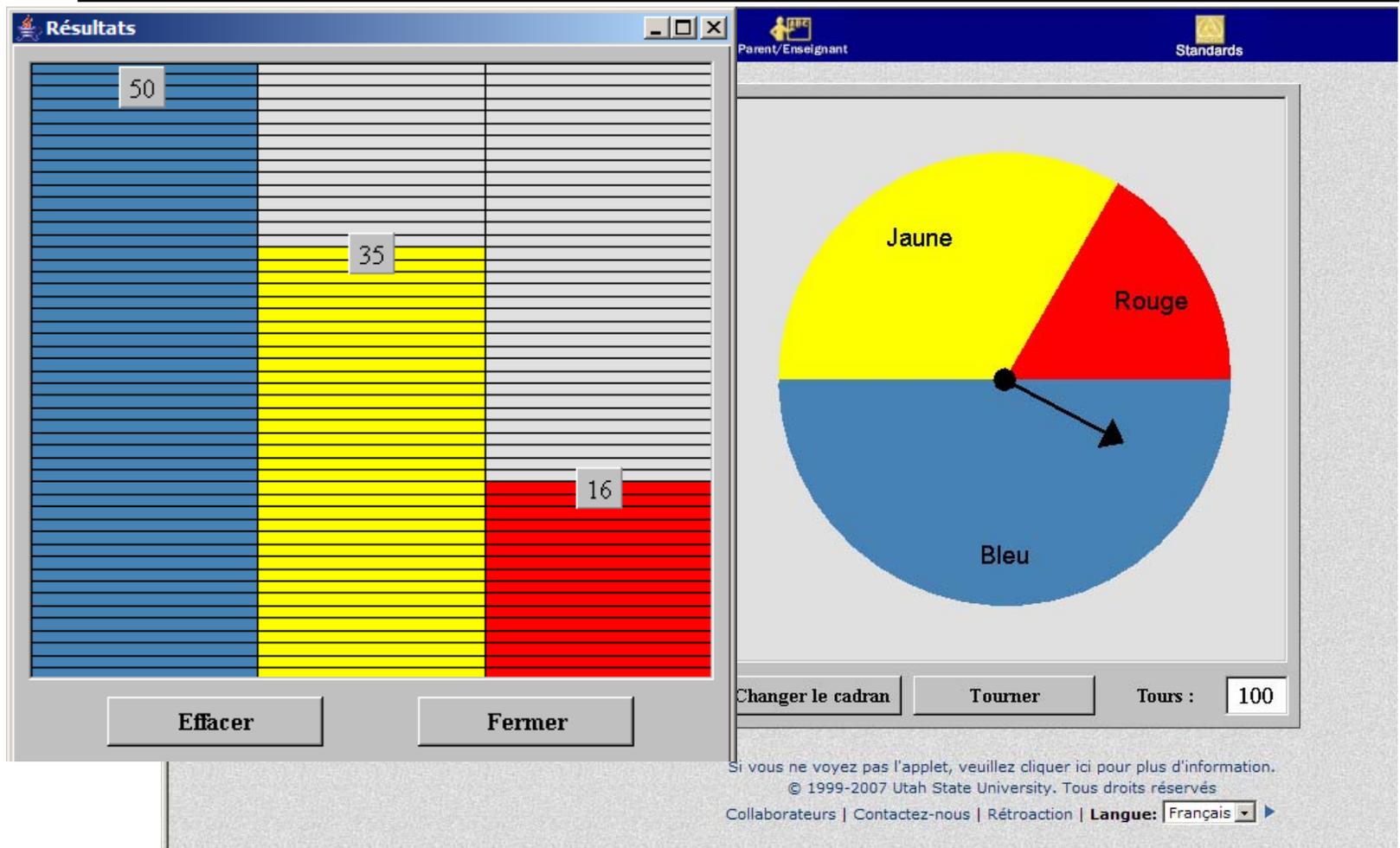
*que la flèche s'arrête  
sur le bleu ?*

- + Liens avec le **dénombrement**, la **fraction**, les **fractions équivalentes**
- Renforcement de la conception selon laquelle une **fraction**  $< 1$
- Probabilité liée à une représentation **spatiale** (trop) **concrète** (« partie d'un tout » ou « partie d'une collection »)
- Évacuation de la **proportion** sous-jacente
- Construction de nombres sur lesquels on **n'opère pas**

**Nécessité de travailler le *sens* et l'*utilité* de la probabilité comme *nombre***

- Confronter aux **évaluations qualitatives** → approche **subjective**
- Intégrer l'**expérimentation**, la **simulation** → approche **fréquentielle**
- Considérer des **événements composés** → **opérer** sur des probabilités

# Un simulateur sur internet : Le cadran du hasard



<http://nlvm.usu.edu/fr/>

# Un exemple: la météo du jour

Maison et Jardinage	Prévisions à court terme		
		Jeudi matin	Jeudi après-midi
Prévisions jardinage			
Activités			
ZoneVerte			
Bulletin golf			
Prévisions maritimes	TEMPÉRATURE	11°C	14°C
Prévisions parcs	CIEL	Nuageux avec averses	Plutôt nuageux
Bulletin ski	P.D.P.	40%	30%
Prévisions scolaires	VENTS	E 10km/h	E 5km/h
Contemplation des étoiles	HUMIDITÉ	97%	85%
Santé et Environnement			
Malaises et douleurs 			

Est-il plus probable qu'il pleuve ou qu'il ne pleuve pas?

Quelle est la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui?

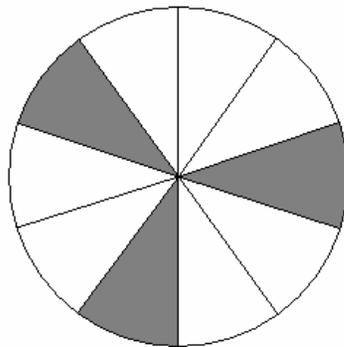
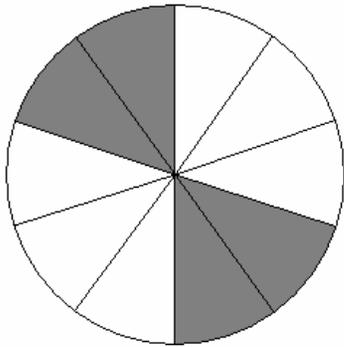
- a) 70 %
- b) 35 %
- c) 33 %
- d) 12 %
- e) aucune de ces réponses

« Essayons », pour voir...

# Faisons la pluie et le beau temps!



*En supposant indépendantes  
la pluie de l'après-midi et  
celle du matin.*



Essai	Pluie en AM	Pluie en PM	Pluie dans la journée	Pluie en AM <u>et</u> en PM
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Total				

# Pour y voir plus clair : ... un nouveau problème !

---

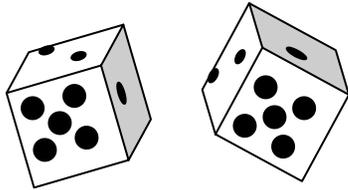
- Votre ami et vous convenez de lancer **deux dés** et de **multiplier** les valeurs de chaque dé pour déterminer qui va commencer une partie.
- Votre ami a obtenu **16**.
  - Est-il **plus probable** ou **moins probable** que vous obteniez un **produit plus élevé**?
  - Est-il **possible** que vous obteniez **le même** produit?
- Vous obtenez le même résultat que votre ami. Votre ami vous propose, pour déterminer qui va commencer, de lancer une dernière fois les dés :
  - si le **produit** est **pair**, c'est **lui** qui commence;
  - si le **produit** est **impair**, c'est **vous**.

Que pensez-vous de sa proposition?
- Qu'arriverait-il si vous **additionniez** les valeurs affichées sur les dés au lieu de les multiplier?

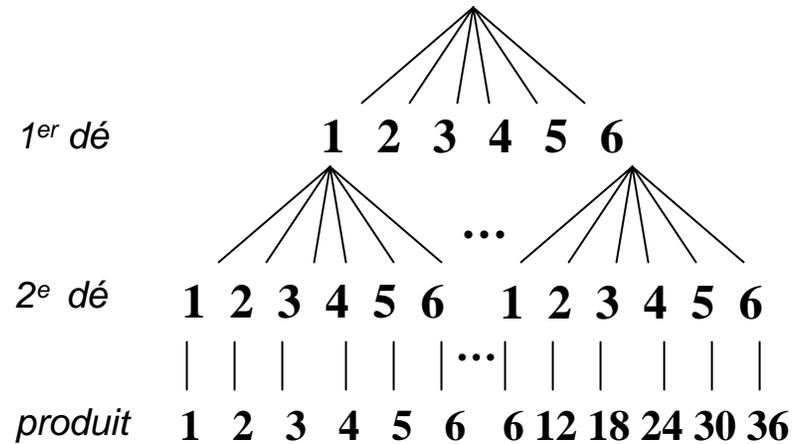
Essayons à nouveau ...



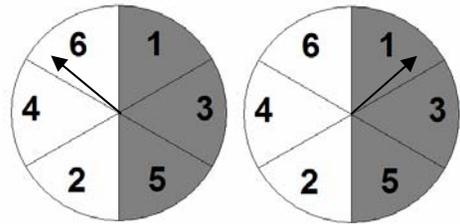
# Le produit des valeurs



		2 <sup>e</sup> dé					
		1	2	3	4	5	6
1 <sup>er</sup> dé	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24
	5	5	10	15	20	25	30
	6	6	12	18	24	30	36



# Le produit des valeurs

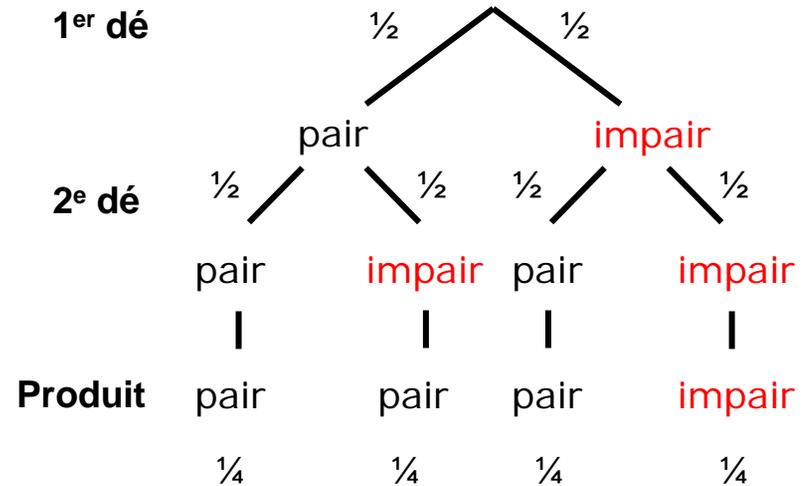


1<sup>er</sup> dé

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36



	1	3	5	2	4	6
1	1	3	5	2	4	6
3	3	9	15	6	12	18
5	5	15	25	10	20	30
2	2	6	10	4	8	12
4	4	12	20	8	16	24
6	6	18	30	12	24	36

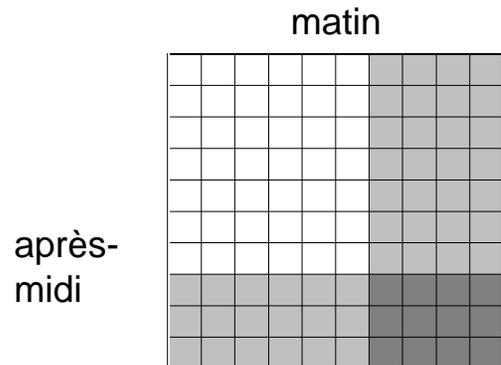


$$P(\text{produit pair}) = 1 - P(\text{les 2 nombres sont impairs})$$

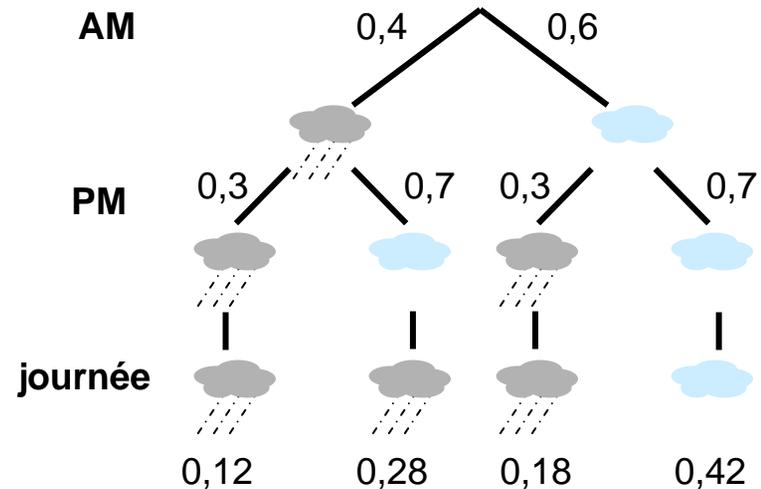
$$= 1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- + Passage requis **du spatial** (12 faces ou 12 secteurs) **à l'univers des possibles** (36 possibilités)
- + Travail sur le **sens de la multiplication** et des **dimensions** (**combinatoire, aire**) en variant les **représentations**
- + Contexte qui donne **sens** à la **multiplication** de **fractions < 1**
- + Repérage de **propriétés** de la **table de multiplication**
- + Découverte du passage par **l'événement complémentaire**
- + Identification de **régularités** (raisonnement inductif)

# Retour à la météo



$$\begin{aligned} P(\text{pluie}) &= 0,4 + 0,3 - (0,4 \times 0,3) \\ \text{ou} & 0,4 + (0,3 \times 0,6) \\ \text{ou} & (0,4 \times 0,7) + (0,4 \times 0,3) + (0,3 \times 0,6) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(\text{pluie}) &= 0,4 + 0,3 \times 0,6 \\ &= 0,58 \end{aligned}$$

- + Généralisation aux événements **non équiprobables**
- + Utilisation d'**évaluations subjectives** authentiques
- + Contexte donnant un **sens** à la **multiplication de décimaux < 1**
- + Illustration des liens entre **fractions, décimaux** et **pourcentages**
- + Illustration des **propriétés** de la **multiplication**

# Un petit dernier?

---

- Votre ami et vous allez commencer une partie d'échecs.
- Pour déterminer celui qui aura les blancs, il vous propose un nouveau jeu. Il lancera trois pièces de monnaie.
  - si les **trois pièces** tombent sur du même côté, c'est **vous** qui avez les blancs;
  - sinon, c'est **lui** qui les a.
- Que pensez-vous de sa proposition?

On fait l'expérience ?



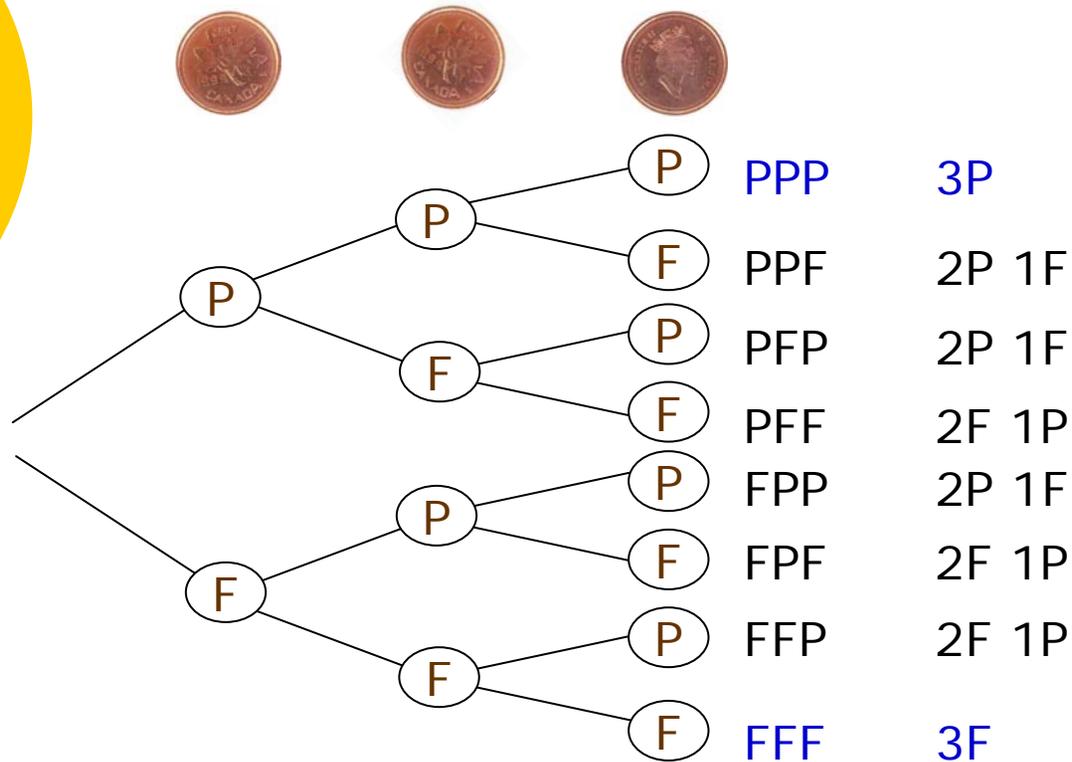
# Trois p'tits sous

---

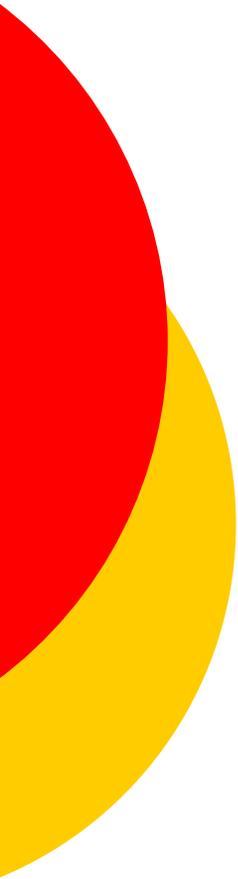


Essai	3P	3F	2P 1F	2F 1P	Pareilles	Différentes
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
Total						

# L'arbre des possibilités



- Généralisation à **trois dimensions** (ou plus !)
- Contexte donnant un **sens** aux **exposants**
- Lien avec les familles nombreuses !



# Probabilités et arithmétique: une intersection

---

*aux possibilités infinies !...*